Polinômio de Taylor

O polinômio $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}$ é chamado polinômio de Taylor de grau n gerado por f em $x = x_0$.

Def. $(T_n f)(x) = P_n(x)$ é chamado operador de Taylor de grau n.

Teorema. Seja P_n um polinômio de grau n. Sejam f, g deriváveis de ordem n e suponha que $f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$ com $g(0) = 0$. Então P_n é o polinômio de Taylor para f em $x_0 = 0$.

dem. Seja $h(x) = f(x) - P_n(x) = x^n g(x)$. Por um lado

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(h(x)\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(f(x) - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n\right)\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= f^{(k)}(0) - a_k k!$$

Por outro lado $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(h(x)\right) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^n g(x)\right) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(n x^{n-1} g(x) + x^n g'(x)\right)$

$$= n(n-1)\dots(n-(k-1))\, x^{n-k} g(x) + \dots + x^n g^{(k)}(x)$$

$\rightsquigarrow \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(h(x)\right)\Big|_{x=0} = 0$. $\quad 0 < k \leq n$ $\quad \therefore$ $\boxed{\frac{f^{k}(0)}{k!} = a_k}$ $\rightsquigarrow$ P_n é o polinômio de Taylor de f. ▥

Exemplos.

1) Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$ para $x_0 = 0$.

Solução: Lembre-se que $1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+\dots+x^n)$

$$\rightsquigarrow \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+\dots+x^n \rightsquigarrow \frac{1}{1-x} = 1+\dots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad |x|<1.$$

Note que $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \dfrac{x}{1-x} = x^n g(x)$ com $g(0)=0$ e g suave.

$$\therefore \; T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1+x+\dots+x^n \quad \text{qdo } |x|<1.$$

para $x_0 = 0$

2) Substituindo x por $-x^2$ no exemplo anterior temos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^n + R_{n+1}(-x^2)$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + R_{2n+1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i} + R_{2n+1}(x) \qquad \text{qdo } |x| < 1.$$

OBS: Note que se $|x^2| < 1$ se só se $|x| < 1$.

Proposição: O operador de Taylor satisfaz:

(i) $T_{n-1}(f') = (T_n f)'$ e (ii) $T_{n+1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = \int_{x_0}^{x} (T_n f)(t)\,dt$.

dem.

(i) $\frac{d}{dx}\left(T_n f\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x-x_0)^{i-1}$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f')^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = T_{n-1} f'$.

(ii) $\int_{x_0}^{x} (T_n f)(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left\{ f(x_0) + f'(x_0)(t-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^n \right\} dt$

$$= f(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Por outro lado, se $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$$T_{n+1} g = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{g^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$= 0 + f(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$\therefore \quad \left(T_{n+1} g\right) = \int_{x_0}^{x} \left(T_n f\right)(t)\,dt \,. \qquad \blacksquare$$

Exemplo Sabemos que $T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i}$ se $|x|<1$.

Da proposição anterior temos

$$T_n\left(\arctan x\right) = T_n\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right) = \int_0^x T_{n-1}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$n-1 = 2n' \rightsquigarrow n = 2n'+1$

$$\therefore T_{2n+1}\left(\arctan x\right) = \int_0^x T_{2n}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_0^x t^{2i}\, dt = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{2i+1}}{2i+1}\Bigg|_0^x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Irracionalidade de e:

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = R_{n+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,dt \leq R_{n+1}(1) = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt \leq \frac{1}{n!}\, e \int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

Como $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = -\left.\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ temos

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq R_{n+1}(1) \leq \frac{1}{(n+1)!}\, e$$

$$en! = \frac{p}{q}\, n!$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(n+1)!} \le e^1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} \le \frac{e}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \quad 0 < \frac{1}{n+1} \le en! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \le \frac{e}{n+1} \le \frac{3}{n+1}$$ já que $e \in (2,3)$.

$\therefore$ Se $e \in \mathbb{Q}$ podemos escolher n grande o suficiente para que

$$en! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = en! - \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)$$ seja a

diferença de inteiros menores ou iguais a $3/4$ com $n \geq 3$.

Como isso não é possível temos $e \notin \mathbb{Q}$. $\blacksquare$