A fórmula de Taylor

Seja $f:[a,b]\mapsto \mathbb{R}$ derivável em (a,b).

Assim podemos considerar $f':(a,b)\mapsto \mathbb{R} : x\in(a,b)\longmapsto f'(x)$.

Se f' também é derivável em (a,b) consideramos a segunda derivada

def: $f'':(a,b)\mapsto \mathbb{R} : x\in(a,b)\to f''(x)=\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)$.

Dessa forma podemos definir $f^{(3)}, f^{(4)}, \dots, f^{(k)}, \dots$ $k\in\mathbb{N}$.

Exemplo: Seja $f(x)=x^2-1$. Calcule $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$.

$$f'(x)=2x \rightsquigarrow f''(x)=2 \rightsquigarrow f'''(x)=0 \rightsquigarrow \underset{k\geq 3}{f^{(k)}(x)\equiv 0}.$$

Teo. (Fórmula de Taylor) Seja $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$. Suponha que $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existem e são contínuas em $[a,b]$. Suponha que $f^{(n+1)}$ exista em (a,b). Seja $c\in(a,b)$. Então para qq. $x\in[a,b]$, $x\neq c$, $\exists\ \xi$ entre x e c tq.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_{n+1}(x)$$

$$\text{onde } R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

OBS: (i) O caso $n=0$ é o Teo. do Valor Médio.

(ii) R_{n+1} é chamado resto e $P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$

o polinômio de Taylor de grau n gerado por f no ponto c.

Exemplos: 1) A forma de Taylor para $f(x) = e^x$ em $c = 0$.

$$\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}\left(e^x\right)\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}$$

com

$$R_{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2) A fórmula de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $c = 0$.

$$\left.\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(\operatorname{sen} x)\right|_{x=0} = \left.\begin{cases} \operatorname{sen} x & k = 4n \\ \cos x & k = 4n+1 \\ -\operatorname{sen} x & k = 4n+2 \\ -\cos x & k = 4n+3 \end{cases}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0 & k = 4n \\ 1 & k = 4n+1 \\ 0 & k = 4n+2 \\ -1 & k = 4n+3 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}$$

$$\text{com } R_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \cos(\xi)\, x^{2n+3}$$

Note $\quad |R_{2n+3}| = \left|\dfrac{\cos(\xi)}{(2n+3)!}\right| |x|^{2n+3}$

$$\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} < \varepsilon$$

3) A fórmula de Taylor para $\ln(x+1)$ em $c=0$.

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\ln(x+1)\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(x+1)^k}\Bigg|_{x=0} = (k-1)!\,(-1)^{k+1}$$

$$\ln(x+1) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{2}}{3\cancel{!}}x^3 - \frac{\cancel{3!}}{4\cancel{!}}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{\cancel{(n-1)!}(-1)^{n+1}}{n\cancel{!}}x^n + R_{n+1}$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}} \frac{x^{n+1}}{(\xi+1)^{n+1}}$$

$$\therefore R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}$$

Prova da fórmula de Taylor. Sdpg. Suponha $x > c$ em (a,b). Seja

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

com $K = \left[f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] \frac{(n+1)!}{(x-c)^{n+1}}$.

Como x e c estão fixos, K é constante.

Note que F é contínua, derivável com $F(c) = F(x) = 0$.

Pelo Teorema de Rolle $\exists\ \xi \in (x, c)$ tal que $F'(\xi) = 0$.

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$+ f'(t) + f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} + \frac{K}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n.$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{K}{n!}(x-t)^n$$

$$\therefore\ 0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{K}{n!}(x-\xi)^n$$

$$K = f^{(n+1)}(\xi).$$

∎

Forma de Taylor Resto Integral

Teo. Seja $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ cont. com derivadas contínuas até ordem $n+1$.
Então o intervalo $[a,b]$ temos $\forall x \in [a,b]$ e $x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

onde $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{n+1}(t)\, dt$.

dem. Pelo TFC $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$.

Como $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'\,dt = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$

temos $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$.

Mais, $\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = -\frac{f''(t)(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2}\,dt$ e assim

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\,dt.$$

Logo o resultado segue por indução. $\blacksquare$