P3 — Eletromagnetismo 1 — 2021

Início: 08:00 do dia 14/12/2021
Entrega (via Moodle): até 08:00 do dia 15/12/2021

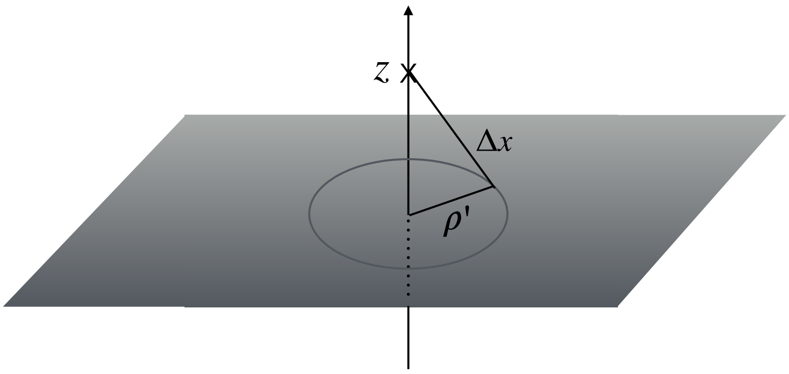
Q1 **[4.0]** – O plano infinito $z = 0$ tem uma densidade superficial de corrente que é nula para $t \leq 0$, mas que aumenta linearmente com o tempo a partir do instante $t = 0$. Usando a *função-degrau de Heaviside*, $\theta_H(x) = 0$ se $x \leq 0$, e $\theta_H(x) = 1$ se $x \geq 0$, podemos escrever a densidade de corrente no volume, $\vec{J}(t, x, y, z)$, como:

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = a\, t\, \theta_H(t)\, \delta(z)\, \hat{x} \ .$$

(a) **[0.5]** Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Com isso podemos assumir que a densidade de carga é constante ou nula, e ignorar a solução eletrostática, o que significa que os campos elétrico e magnético são completamente determinados pelo potencial-vetor $\vec{A}(t, \vec{x})$.

(b) **[0.5]** Tome um observador a uma altura z do plano. Em que instante esse observador vai começar a medir os campos elétricos e magnéticos gerados pela corrente no plano $z = 0$?

(c) **[0.5]** Esse problema tem um alto grau de simetria. Em particular, se calcularmos o potencial-vetor em $\vec{A}(t, x = 0, y = 0, z)$, o resultado vale para quaisquer outros valores de x, y. Vamos então calcular $\vec{A}(t, z)$, mas usando coordenadas cilíndricas, ou seja, $d^3x' \to \rho' d\rho' d\phi' dz'$. A figura abaixo mostra o que devemos fazer.



Usando a fórmula para o potencial-vetor retardado (veja as minhas notas, ou consulte o Griffiths), mostre que $\vec{A}(t, z) = A_x(t, z)\, \hat{x}$, com:

$$A_x(t, z) = \frac{\mu_0\, a}{2} \int_0^\infty d\rho'\, \rho' \frac{(t - \Delta x/c)\, \theta_H(t - \Delta x/c)}{\Delta x} \ ,$$

onde $\Delta x = \sqrt{(\rho')^2 + z^2}$.

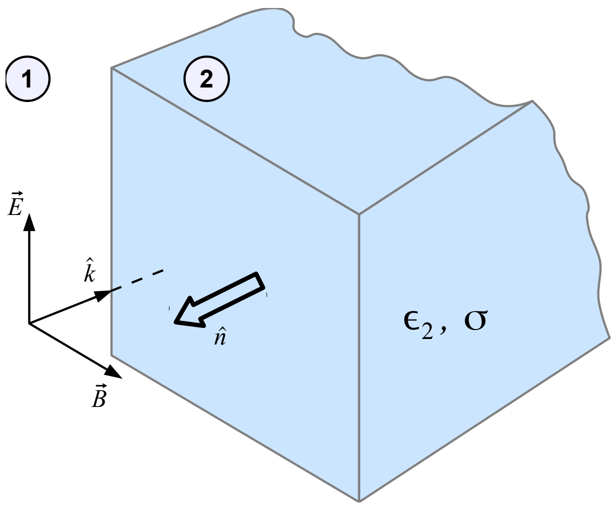
(d) **[1.0]** Agora, note que, para qualquer t e z fixos, a função-degrau $\theta_H(t - \Delta x/c)$ se anula quando $\rho' > R = \sqrt{c^2 t^2 - z^2}$. Isso significa que podemos substituir a função-degrau na integral acima pela imposição dos limites de integração $0 \leq \rho' \leq R$. Use esse fato para calcular $A_x(t, z)$.

Note que as integrais são muito fáceis – você apenas tem que prestar um pouco de atenção no *sinal* de z, que tanto pode ser positivo (se estivermos acima do plano) quanto negativo (abaixo do plano). Lembre-se também de que o resultado que você vai obter nesse cálculo só vale quando $R \geq 0$, ou seja, quando $|z| \leq c\,t$ [veja o item (b)!].

(e) **[0.5]** Agora use o resultado do item (d) para calcular o campo elétrico.

(f) **[0.5]** Calcule agora o campo magnético. [Você talvez queira usar a expressão para a derivada do módulo, $d(|z|)/dz = |z|/z$.]

(g) **[0.5]** Certifique-se de que as direções e sentidos das suas respostas para os itens (e) e (f) estão corretos, verificando que o vetor de Poynting, $\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, aponta no sentido de levar a radiação eletromagnética para *longe* do plano $z = 0$.



Q2 **[3.0]** — Uma onda eletromagnética propagando-se no ar ($\mu = \mu_0; \epsilon = \epsilon_0$), na direção z, incide normalmente na interface com um meio condutor, de condutividade σ, permeabilidade magnética $\mu = \mu_0$ e constante dielétrica ϵ_2 (veja figura). As ondas incidentes e refletida, no meio 1, e a transmitida, no meio 2, podem ser expressas como

$$\vec{E}_1(z,t) = E_1 e^{i(k_1 z - \omega t)}\hat{e}_x;$$
$$\vec{E}_1'(z,t) = E_1' e^{-i(k_1 z + \omega t)}\hat{e}_x;$$
$$\vec{E}_2(z,t) = E_2 e^{i(\gamma_2 z - \omega t)}\hat{e}_x;$$

respectivamente, onde $k_1 = \omega/c$ e $\gamma_2 = \alpha + i\beta$ é uma constante complexa. As expressões de α e β não importam neste problema.

a) **[0.5]** Mostre que o campo $\vec{H}_2$ da onda se propagando no meio 2 é dado por

$$\vec{H}_2(z,t) = \frac{\gamma_2}{\mu_0 \omega} E_2 e^{i(\gamma_2 z - \omega t)}\hat{e}_y$$

Qual é o efeito do fator γ_2 na relação entre as amplitudes $\vec{E}_2$ e $\vec{H}_2$?

b) **[0.5]** Obtenha as relações que as amplitudes dos campos incidente, refletido e transmitido devem satisfazer na interface $z = 0$, ou seja

$$E_1 + E_1' = E_2; \qquad k_1(E_1 - E_1') = \gamma_2 E_2$$

Note que, como γ_2 é complexo, as amplitudes soluções destas equação também serão grandezas complexas.

c) **[0.5]** Obtenha as expressões para os coeficientes de reflexão e transmissão dos campos:

$$r = \frac{E_1'}{E_1} = \frac{1 - c\gamma_2/\omega}{1 + c\gamma_2/\omega} \qquad t = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{2}{1 + c\gamma_2/\omega}$$

d) **[1.0]** Naturalmente esses coeficientes são complexos. No entanto, quando calcularmos o coeficiente de reflexão de intensidade, temos que determinar a razão entre os vetores de Poynting reais, ou seja,

$$R = \frac{|S_1'|}{|S_1|}$$

Mostre que

$$R = \frac{(\omega/c - \alpha)^2 + \beta^2}{(\omega/c + \alpha)^2 + \beta^2}$$

e) **[0.5]** Não podemos calcular o coeficiente de transmissão de potência neste caso, porquê a potência transmitida para o meio 2 não é dada simplesmente pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \times \vec{H}_2\right]$$

naquele meio. Explique fisicamente o porquê dessa aparente "não-conservação de energia".

Q3 [3.0] — Uma onda polarizada paralelamente ao plano de incidência incide desde um meio 1 em um meio 2, com ângulo de incidência igual ao ângulo de Brewster. Assuma que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, e que $\varepsilon_2 = 3\,\varepsilon_1$.

(a) **[1.0]** Qual é a amplitude do campo elétrico transmitido, expressa em termos da amplitude do campo elétrico incidente?

(b) **[1.0]** A amplitude do campo elétrico, calculada acima, muda de um meio para outro. Como não há onda refletida, isso implica uma não-conservação de energia? Substancie a sua resposta, argumentando com base nas grandezas físicas apropriadas e na geometria do problema (ou seja, respostas puramente qualitativas não serão aceitas).

(c) **[1.0]** Suponha agora que uma superposição de ondas com uma distribuição uniforme de polarizações incide sobre a interface entre os dois meios com o mesmo ângulo encontrado no item (a). Nesse caso, dizemos que a luz incidente é "não-polarizada", já que não há uma direção preferencial na qual o campo elétrico oscila. O que você pode dizer sobre a polarização da luz refletida e transmitida? Substancie a sua resposta utilizando as amplitudes dos campos elétricos, ou em termos das intensidades das ondas.