ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

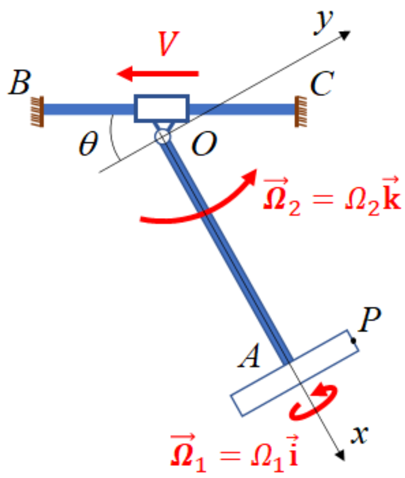
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 2 – 14 de Dezembro de 2021

Duração da Prova: 140 minutos (Início: 15:40 – Término: 18:00)

Questão 1 (3,0 pontos). O sistema mostrado na figura é composto pela barra OA, de comprimento L, e por um disco de centro A e raio R. No instante considerado, a barra OA gira ao redor do ponto O com vetor de rotação $\vec{\mathbf{\Omega}}_2 = \Omega_2\vec{\mathbf{k}}$, constante, e o disco gira ao redor do eixo OA com vetor de rotação $\vec{\mathbf{\Omega}}_1 = \Omega_1\vec{\mathbf{i}}$, constante. Neste mesmo instante, o sistema desloca-se ao longo da guia fixa BC, com a velocidade V indicada na figura, constante. Considere que o sistema de referência móvel $Oxyz$ é solidário à barra OA e que P é um ponto da periferia do disco, com coordenadas $(L, R, 0)$. Nestas condições, e para o instante considerado, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$.



(a) A velocidade relativa do ponto P. (0,25 ponto)
(b) A velocidade de arrastamento do ponto P. (0,5 ponto)
(c) A aceleração relativa do ponto P. (0,25 ponto)
(d) A aceleração de arrastamento do ponto P. (0,5 ponto)
(e) A aceleração de Coriolis do ponto P. (0,5 ponto)
(f) O vetor de rotação absoluta do disco. (0,5 ponto)
(g) O vetor aceleração rotacional absoluta do disco. (0,5 ponto)

RESOLUÇÃO

<u>Movimento relativo: do disco</u>

$$\vec{v}_{A_{rel}} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\vec{v}_{P_{rel}} = \vec{v}_{A_{rel}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge (P - A) = \Omega_1\vec{\mathbf{i}} \wedge R\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{P_{rel}} = \Omega_1 R\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{a}_{A_{rel}} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\vec{a}_{P_{rel}} = \vec{a}_{A_{rel}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_1 \wedge (P - A) + \vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge (P - A)\right] = \Omega_1\vec{\mathbf{i}} \wedge \Omega_1 R\vec{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{P_{rel}} = -{\Omega_1}^2 R\vec{\mathbf{j}}$$

<u>Movimento de arrastamento: da barra e movimento ao longo da guia BC</u>

$$\vec{v}_{O_{arr}} = -Vsen\theta\vec{\mathbf{i}} - Vcos\theta\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{v}_{A_{arr}} = \vec{v}_{O_{arr}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (A - O) = -Vsen\theta\vec{\mathbf{i}} - Vcos\theta\vec{\mathbf{j}} + \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge L\vec{\mathbf{i}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{A_{arr}} = -Vsen\theta\vec{\mathbf{i}} + (\Omega_2 L - Vcos\theta)\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{v}_{P_{arr}} = \vec{v}_{O_{arr}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (P - O) = -Vsen\theta\vec{\mathbf{i}} - Vcos\theta\vec{\mathbf{j}} + \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(L\vec{\mathbf{i}} + R\vec{\mathbf{j}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{P_{arr}} = -(Vsen\theta + \Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}} + (\Omega_2 L - Vcos\theta)\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{a}_{A_{arr}} = \vec{a}_{O_{arr}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_2 \wedge (A - O) + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (A - O)\right] = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \Omega_2 L\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{A_{arr}} = -{\Omega_2}^2 L\vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{a}_{P_{arr}} = \vec{a}_{O_{arr}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_2 \wedge (P - O) + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (P - O)\right] = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(\Omega_2 L\vec{\mathbf{j}} - \Omega_2 R\vec{\mathbf{i}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{P_{arr}} = -{\Omega_2}^2 L\vec{\mathbf{i}} - {\Omega_2}^2 R\vec{\mathbf{j}}$$

<u>Acelerações de Coriolis:</u>

$$\vec{a}_{A_{Cor}} = 2\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \vec{v}_{A_{rel}} = 2\Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{A_{Cor}} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\vec{a}_{P_{Cor}} = 2\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \vec{v}_{P_{rel}} = 2\Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \Omega_1 R\vec{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{P_{Cor}} = \vec{\mathbf{0}}$$

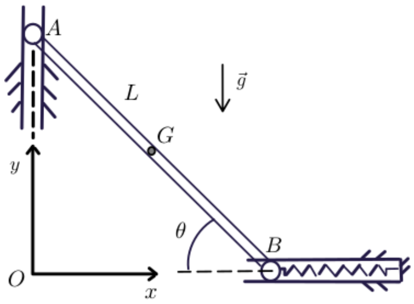
<u>Composição de Movimentos:</u>

$$\vec{v}_{A_{abs}} = -Vsen\theta\vec{\mathbf{i}} + (\Omega_2 L - Vcos\theta)\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{v}_{P_{abs}} = -(Vsen\theta + \Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}} + (\Omega_2 L - Vcos\theta)\vec{\mathbf{j}} + \Omega_1 R\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{a}_{A_{abs}} = -{\Omega_2}^2 L\vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{a}_{P_{abs}} = -{\Omega_2}^2 L\vec{\mathbf{i}} - \left({\Omega_2}^2 + {\Omega_1}^2\right)R\vec{\mathbf{j}}$$

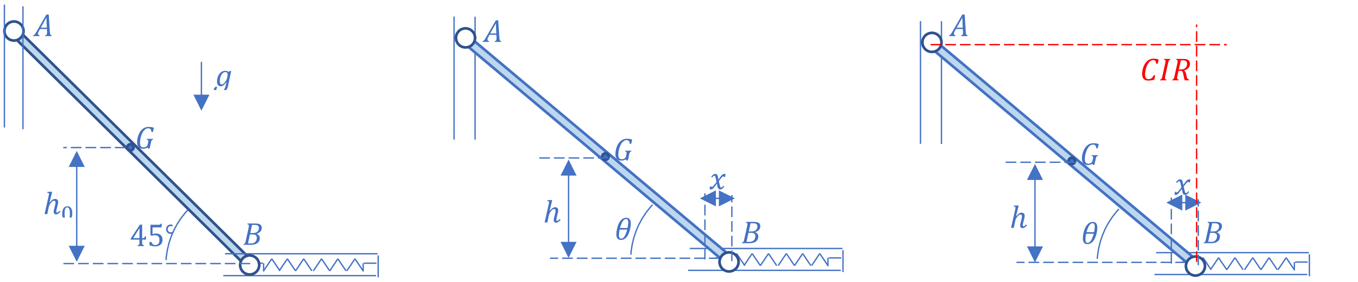
$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{D_{abs}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}_{D_{rel}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{D_{arr}} = \vec{\mathbf{\Omega}}_1 + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 = \Omega_1\vec{\mathbf{i}} + \Omega_2\vec{\mathbf{k}}$$
$$\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{D_{abs}} = \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{D_{rel}} + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{D_{arr}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{D_{arr}} \wedge \vec{\boldsymbol{\omega}}_{D_{rel}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \vec{\mathbf{\Omega}}_1 = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \Omega_1\vec{\mathbf{i}} = \Omega_1\Omega_2\vec{\mathbf{j}}$$

Questão 2 (3,0 pontos). O sistema ilustrado na figura é composto por uma barra delgada e homogênea de comprimento L e massa m, soldada a duas pequenas esferas A e B, de massas desprezíveis. Ambas as esferas podem deslizar sem atrito ao longo de duas guias lineares fixas. O centro da esfera B é ligado a uma mola linear de constante elástica k presa à extremidade da guia horizontal. O sistema é liberado do repouso quando a barra forma um ângulo θ_0 com a horizontal e a mola está indeformada, isto é, possui seu comprimento natural. Dado $J_{Gz} = \frac{mL^2}{12}$ (barra), determine:



- **(a)** O trabalho realizado pelas forças não conservativas quando a inclinação da barra varia de θ_0 até θ. **(0,5 ponto)**
- **(b)** O trabalho realizado pelo peso quando a inclinação da barra varia de θ_0 até θ. **(0,5 ponto)**
- **(c)** O trabalho realizado pela força elástica quando a inclinação da barra varia de θ_0 até θ. **(0,5 ponto)**
- **(d)** As coordenadas do centro instantâneo de rotação da barra em função do ângulo de inclinação θ da barra, de acordo com o sistema de coordenadas da figura. **(0,5 ponto)**
- **(e)** A energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω da barra. **(0,5 ponto)**
- **(f)** A velocidade angular ω^2 da barra em função do seu ângulo de inclinação θ. **(0,5 ponto)**

RESOLUÇÃO



Notemos que, quando a barra realiza um deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_0 - \theta$, a mola sofre uma deformação

$$x = L(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

e o centro de massa G da barra se desloca de

$$\Delta h = h_0 - h = L(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

Notemos também que as forças de contato não realizam trabalho, pois o atrito é desprezível. Logo, o trabalho realizado pelas forças agentes no sistema, se expressa como:

$$\tau = mg\Delta h - \frac{kx^2}{2} = mg\frac{L}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta) - \frac{kL^2(\cos\theta - \cos\theta_0)^2}{2}$$

Quando a barra forma um ângulo θ com a horizontal o seu centro instantâneo de rotação se localiza em (vide figura acima) $(L\cos\theta\,, L\sin\theta)$.

O momento de inércia da barra, em relação ao ponto I pertencente à sua extensão material, tal que $I \equiv CIR$, é:

$$J_{Iz} = J_{Gz} + m(\overline{GI})^2 = \frac{mL^2}{12} + m[(x_G - x_I)^2 + (y_G - y_I)^2]$$

$$J_{Iz} = \frac{mL^2}{12} + m\left[\left(\frac{L\cos\theta}{2} - L\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{L\sin\theta}{2} - L\sin\theta\right)^2\right]$$

$$J_{Iz} = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{4} = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

Portanto, a energia cinética da barra se expressa como:

$$T = \frac{J_{Iz}\omega^2}{2} = \frac{mL^2}{6}\omega^2$$

Finalmente, aplicando-se o Teorema da Energia Cinética, obtém-se:

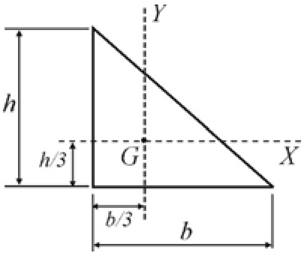
$$\frac{mL^2}{6}\omega^2 = mg\frac{L}{2}(\sin\theta_0 - \sin\theta) - \frac{kL^2}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)^2$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

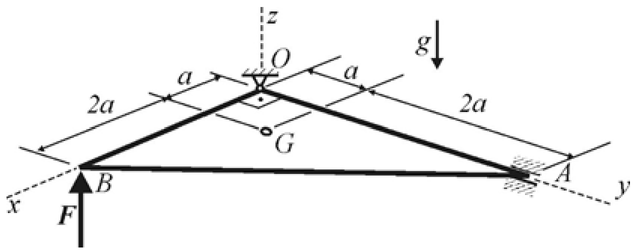
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (4,0 pontos). A placa triangular uniforme, com massa m e centro de massa em G, é apoiada no plano horizontal por mancais tipo articulação em O e tipo anel em A. Suponha que a placa seja uma placa fina e despreze o tamanho de cada mancal. A placa está inicialmente em repouso, e uma força vertical F é aplicada a ela no ponto B, conforme mostra a figura. Dados:



$$J_{GX} = \frac{mh^2}{18} \qquad J_{GY} = \frac{mb^2}{18} \qquad J_{GXY} = -\frac{mbh}{36}$$



Para o instante inicial:

(a) Faça o diagrama de corpo livre da placa. ***(1,0 ponto)***

(b) Determine a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G da placa, em função da sua rotação $\vec{\omega}$ e sua aceleração rotacional $\dot{\vec{\omega}}$. ***(0,5 ponto)***

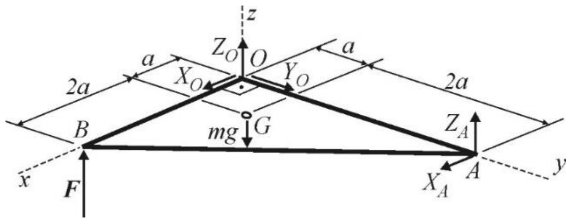
(c) Obtenha o momento de inércia J_{Oy} e os produtos de inércia J_{Oxy} e J_{Ozy} da placa. ***(0,5 ponto)***

(d) Escreva as equações escalares fornecidas pelo TR (Teorema da Resultante) e pelo TQMA (Teorema da Quantidade de Movimento Angular). Utilize o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário à placa. ***(1,5 pontos)***

(e) Determine as componentes de reação nos mancais e a aceleração angular da placa, em função de F e dos demais dados. ***(0,5 ponto)***

RESOLUÇÃO

(a) Diagrama de corpo livre:



1,0 ponto

(b) Utilizando o sistema de coordenadas *Oxyz* solidário à placa, temos:

Cinemática, instante inicial (parte do repouso, $\omega = 0$):

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{\mathbf{j}} \wedge (G-O) + \omega\vec{\mathbf{j}} \wedge \left[\omega\vec{\mathbf{j}} \wedge (G-O)\right] = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{\mathbf{j}} \wedge a\left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{a}_G = -\dot{\omega} a \vec{\mathbf{k}}}$$

0,5 ponto

(c)
$$J_{Oy} = \frac{m(3a)^2}{18} + ma^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J_{Oy} = \frac{3ma^2}{2}}$$

$$J_{Oxy} = -\frac{m(3a)(3a)}{36} + m(a)\cdot(a) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J_{Oxy} = \frac{3ma^2}{4}}$$

$$J_{Ozy} = 0 + m0\cdot(a) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J_{Ozy} = 0}$$

0,5 ponto

(d) **TR**, instante inicial ($\vec{\boldsymbol{F}} = F\vec{\mathbf{k}}$):

$$m\vec{a}_G = -m\dot{\omega}a\vec{\mathbf{k}} = (X_O + X_A)\vec{\mathbf{i}} + Y_O\vec{\mathbf{j}} + (Z_O + Z_A + F - mg)\vec{\mathbf{k}} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{X_O = -X_A} & (1) \\ \boldsymbol{Y_O = 0} & (2) \\ \boldsymbol{-m\dot{\omega}a = Z_O + Z_A + F - mg} & (3) \end{cases}$$

0,5 ponto

TQMA, polo O: $\vec{\boldsymbol{v}}_O = \vec{\mathbf{0}}$; $\omega_x = 0$; $\omega_y = \omega$; $\omega_z = 0$;

Com $\vec{\boldsymbol{F}} = F\vec{\mathbf{k}}$ (no instante inicial): $\vec{\boldsymbol{H}}_O = \vec{\mathbf{0}} - J_{Oxy}\omega_y\vec{\mathbf{i}} + J_{Oy}\omega_y\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{0}} = -\frac{3ma^2}{4}\omega\vec{\mathbf{i}} + \frac{3ma^2}{2}\omega\vec{\mathbf{j}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = -\frac{ma^2\dot{\omega}}{4}\left(3\vec{i} - 6\vec{j}\right) - \frac{ma^2\omega}{4}\left[3\left(\omega\vec{j} \wedge \vec{i}\right) - 6\left(\omega\vec{j} \wedge \vec{j}\right)\right] =$$

$$= \vec{M}_O^{ext} = (3aZ_A - amg)\vec{i} + (amg - 3aF)\vec{j} - 3aX_A\vec{k}$$

Desta equação vetorial, no instante inicial ($\omega = 0$), obtemos as equações escalares:

$$\boldsymbol{-\frac{3ma^2\dot{\omega}}{4} = 3aZ_A - amg} \qquad \textbf{(4)}$$

1,0 ponto

$$\boldsymbol{\frac{3ma^2\dot{\omega}}{2} = amg - 3aF} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\boldsymbol{0 = -3aX_A} \qquad \textbf{(6)}$$

(e) Resolvendo as equações:

Reação em O: $\left(\boldsymbol{0; 0; \frac{mg+3F}{6}}\right)$

Reação em A: $\left(\boldsymbol{0; 0; \frac{mg+3F}{6}}\right)$

0,5 ponto

Aceleração angular da placa: $\dot{\vec{\omega}} = \frac{2(mg-3F)}{3ma}\vec{j}$