

## LISTA SOBRE SPLINES - MAP2220 - BMAC 2021

Espera-se que o estudante tenha algum tipo de suporte computacional para auxiliar a resolver a lista.

**Questão 1** A função  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , foi tabelada nos pontos igualmente espaçados  $x_j = -5 + j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, 10\}$  e obteve-se:

$x_j$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y_j$	.001597	.003891	.01220	.05882	0.5	1	0.5	.05882	.01220	.003891	.001597

- (i) Encontre o spline cúbico natural,  $S(x)$  que interpola a tabela acima e calcule  $S(j + 0.5)$ , para  $j \in \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$ .
- (ii) Use que  $f'(-5) = .001276$  e  $f'(5) = -.001276$ , encontre o spline cúbico completo  $\bar{S}(x)$  que interpola a tabela acima e calcule  $\bar{S}(j + 0.5)$ , para  $j \in \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$ .
- (iii) Faça um esboço do gráfico de  $S(x)$ ,  $\bar{S}(x)$  e  $f(x)$  para  $x \in [-5, 5]$ .

**Questão 2** Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  foi tabelada nos pontos da partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  com nós  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  (com  $n \geq 4$ ) e obteve-se  $y_j = f(x_j)$ ,  $0 \leq j \leq n$ .

Quer-se obter um Spline interpolador  $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  de  $f$  (i.e.  $S(x_j) = y_j$ , para  $0 \leq j \leq n$ ) tal que  $S|_{[x_0, x_2]}$  e  $S|_{[x_{n-2}, x_n]}$  sejam funções de classe  $C^3$ .

- (i) Prove que isto acontece se, e só se,  $S|_{[x_0, x_2]}$  e  $S|_{[x_{n-2}, x_n]}$  são polinômios de grau menor ou igual a 3 (não precisam ser o mesmo polinômio)
- (ii) Prove que existe um, e só um spline  $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  que tem as propriedades desejadas.
- (iii) Considere a tabela

$x_j$	-5	-3	0	2	5
$y_j = f(x_j)$	.001597	.01220	1	.05882	.001597

e determine o spline  $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  que satisfaz as condições enunciadas nesta questão.

**Questão 3** Considere  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par, com  $f(x) = 1 - x$ , para  $0 \leq x \leq 1$

- (i) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 4 que melhor aproxima  $f$  pelo M.M.Q. em  $[-1, 1]$ .
- (ii) Considere a partição  $\mathcal{P}$  de  $[-1, 1]$  formada pelos pontos  $x_j = -1 + j$  para  $j \in \{0, 1, 2\}$ . Determine o spline  $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  que melhor aproxima  $f$  pelo M.M.Q. em  $[-1, 1]$  e esboce o gráfico de  $S$ .
- (iii) Compare os erros quadráticos cometidos nas aproximações anteriores.