Habilidades Técnicas *Versus* Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico

RICARDO AVELAR SOTOMAIOR KARAM[1] e MAURÍCIO PIETROCOLA[2]
[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina - Departamento Acadêmico de Formação Geral – Assessoria de Matemática e Universidade de São Paulo / EDM / Faculdade de Educação, karam@ifsc.br
[2]Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada, mpietro@usp.br

Resumo: A importância da resolução de problemas para a ciência tem inspirado pesquisadores em educação a pensar estratégias didáticas centradas nesse processo. Porém, problemas científicos são diferentes dos cotidianos, uma vez que a resolução daqueles envolve processos de raciocínio extremamente elaborados e estruturados em uma linguagem matemática. Considerando que a Matemática estrutura o pensamento físico, apresentamos uma crítica à ingênua função ferramental comumente atribuída à matematização e a uma artificial tentativa de distinção entre problemas matemáticos e científicos. Partindo da hipótese de que a Matemática da Física é semanticamente diferente da ensinada nas aulas de Matemática, propomos uma classificação que permite distinguir *habilidades técnicas* – relacionadas ao domínio instrumental de algoritmos, regras, fórmulas – das *habilidades estruturantes* – associadas à capacidade de se fazer um uso organizacional da Matemática em domínios externos a ela – e exemplificamos a aquisição destas com uma discussão que envolve o uso da trigonometria na resolução de problemas de Física.
Abstract: The importance of problem solving to the development of science has inspired many education researchers to design teaching strategies centered in this process. However, scientific problems are significantly different from the ones of everyday life once they require specific kinds of reasoning and tend to be structured in mathematical language. Taking into account that Mathematics structures physical thought, this paper criticizes the naïve function commonly credited to Mathematics as a mere tool and the artificial distinction between the scientific and mathematical aspects of a problem. Considering that the Mathematics used in Physics is semantically different from the one taught in maths' classes, we propose a categorization which allows us to distinguish *technical skills* – the ones related to the capability of dealing with specific rules and properties of mathematical systems – from the *structural skills* – which are associated to the capacity of employing the mathematical knowledge for structuring physical situations. To exemplify some aspects of the latter, we present a discussion about the use of trigonometric functions in Physics' problems.
Palavras-chave: resolução de problemas, matemática na física, trigonometria, modelagem matemática
Keywords: problem solving, mathematics in physics, trigonometry, mathematical modeling.

INTRODUÇÃO

Resolver problemas faz parte da atividade cotidiana de todos, porém, os problemas científicos são nitidamente diferentes dos problemas enfrentados pelo cidadão comum. Uma das principais razões para esta diferença reside no fato de que as formas de raciocínio (heurísticas) necessárias para a solução destes diferem muito das comumente evocadas para a solução daqueles. Em outras palavras, o raciocínio científico difere substancialmente do raciocínio de "senso comum" e é justamente esse contato com a maneira científica de pensar (Enculturação Científica - ASTOLFI, 1994; MORTIMER, 1994; LEMKE, 1998), um dos objetivos mais procurados no ensino de Ciências.

Uma das características que faz com que esse pensar científico seja diferente do pensar "cotidiano" é que ele é fortemente embasado em estruturas matemáticas. Os cientistas, mais especificamente os físicos, usam a linguagem matemática para estruturar seu pensamento (PIETROCOLA, 2002) e pode-se dizer que a Física é uma ciência que elabora modelos da realidade, os quais costumam ser altamente matematizados, e os confrontam com os resultados obtidos em seus experimentos. Esse processo é uma espécie de diálogo com a natureza através de modelos e, ciente da impossibilidade de acessar a realidade, o físico tenta se aproximar sucessivamente da mesma através da construção de modelos cada vez mais precisos e com maior poder de previsão (BUNGE, 1974).

A importância da Resolução de Problemas para o desenvolvimento da Ciência tem inspirado diversos pesquisadores da área de ensino a avaliar a relevância dos mesmos no contexto escolar. Entretanto, parece-nos que alguns têm demonstrado uma visão ingênua/ferramental em relação ao papel da matematização na Ciência Moderna. Assim, no presente trabalho, pretendemos direcionar nosso foco para a maneira como a função da linguagem matemática vem sendo considerada em algumas das pesquisas que tratam da Resolução de Problemas no ensino de Física.

Algumas pesquisas (REDISH, 2005; TUMINARO e REDISH, 2007) têm sugerido a idéia de que a Matemática usada na resolução de problemas de Física é semanticamente diferente da ensinada por professores de Matemática. Dessa forma, defendemos que, além das *habilidades técnicas* rotineiramente aprendidas nas disciplinas de Matemática, é preciso também desenvolver *habilidades estruturantes* que trabalhem a capacidade dos estudantes em empregar o conhecimento matemático para estruturar situações físicas (PIETROCOLA, 2008). Para exemplificar o desenvolvimento destas, apresentamos uma discussão sobre o papel das funções trigonométricas para a modelagem de fenômenos físicos.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ÁREA DE INVESTIGAÇÃO

> **Antes de tudo, é preciso formular problemas**. E seja o que for que digam, na vida científica, os problemas não se apresentam por si mesmos. É precisamente esse sentido do problema que dá a característica do genuíno espírito científico. Para um espírito científico, **todo conhecimento é resposta a uma questão**. Se não houve questão, não pode haver conhecimento científico (BACHELARD, 1977 , p. 148, grifo nosso).

A citação de Bachelard deixa clara a estreita relação entre o desenvolvimento do conhecimento científico e a Resolução de Problemas e, é exatamente em função dessa relação de impregnação, que o tema Resolução de Problemas tem sido foco de investigação de diversas pesquisas educacionais. De uma maneira geral, essas pesquisas têm se concentrado nos seguintes temas:

- Heurísticas da resolução de problemas de Matemática (POLYA, 1995);
- Estratégias gerais para resolução de problemas de Física (REIF et al., 1976);
- Diferença entre *experts* e iniciantes (LARKIN et al., 1980);
- Problemas abertos (GIL-PÉREZ et al., 1992);
- Resolução significativa *versus* resolução mecânica (AUSUBEL, et al., 1980).
- Resolução individual *versus* resolução em grupo (GASPAR, 1994);
- Resolução centrada no desenvolvimento literal (PEDUZZI e PEDUZZI, 2001);
- Estratégias de pensamento dos estudantes quando usam Matemática na resolução de problemas de Física (*Epistemic Games*) (TUMINARO e REDISH, 2007).

Um dos autores pioneiros na pesquisa nessa área é o matemático George Polya. Em sua obra mais famosa *How to Solve It*, traduzida para o português como *A arte de resolver problemas* (POLYA, 1995), Polya se propõe a estudar os inúmeros métodos de resolução de problemas, estudo também conhecido como *Heurística*, e suas implicações para o ensino-aprendizagem de Matemática. Com o objetivo de sistematizar o complexo processo que envolve a resolução de um problema matemático, o autor propõe um esquema no qual o mesmo pode ser resumido em quatro etapas: 1) Compreensão do Problema, 2) Estabelecimento de um plano, 3) Execução do Plano e 4) Retrospecto. Longe de ser uma simples receita, essa seqüência de etapas é muito bem fundamentada a partir de inúmeros exemplos através dos quais são explicitados os recursos (“dicionário de Heurística”) utilizados na resolução dos mesmos.

O trabalho de Polya foi destinado ao ensino-aprendizagem de Matemática, porém, muitos de seus resultados foram transpostos para outras áreas. Com um objetivo semelhante, mas com o foco na aprendizagem de Física, Reif et al. (1976) buscam identificar habilidades gerais as quais são necessárias para a compreensão das relações quantitativas presentes nesse campo de conhecimento. Segundo os autores, o profundo entendimento de uma relação física se dá quando um indivíduo demonstra as seguintes habilidades: A) *Descreve e exemplifica*: o indivíduo é capaz de descrever a relação e dar um exemplo da mesma; B) *Compreende as quantidades presentes na relação*: consegue identificar se as quantidades são números ou vetores, suas possíveis representações, unidades e magnitudes típicas; interpreta a relação em diversas representações semióticas como palavras, números, fórmulas, gráficos; reconhece as informações a partir das quais cada quantidade pode ou não ser encontrada e identifica semelhanças e diferenças entre cada quantidade e outras; C) *Reconhece os contextos de aplicação da relação específica:* reconhece situações físicas nas quais a relação pode ou não ser aplicada; compara a relação com outras semelhantes; encontra uma expressão ou um valor para qualquer quantidade da relação e ao obter valores diferentes de uma determinada variável, os compara com outra variável; 4) *Organiza as relações:* em uma situação física, identifica as relações aplicáveis e as usa sem confusão (REIF et al, 1976, p. 213).

A partir dessa noção de compreensão, os autores procuram responder à seguinte questão: é possível ensinar aos estudantes algumas estratégias de resolução de problemas de Física? Reif et al. (1976) concluem defendendo que é possível ensinar estratégias *simples* e descrevem quatro etapas presentes em sua estratégia instrucional, ou seja, etapas que são mencionadas e discutidas com os estudantes: 1) *Descrição:* Identifique as informações dadas e requeridas. Desenhe um diagrama da situação; 2) *Planejamento:* Selecione as relações pertinentes para resolver o problema e esboce a maneira como elas devem ser usadas; 3) *Implementação:* Execute o plano delineado no item anterior fazendo todos os cálculos necessários; 4) *Verificação:* Verifique cada um dos passos anteriores e analise se a resposta final faz sentido (REIF et al, 1976, p. 216).

Na perspectiva de análise que gostaríamos de desenvolver neste trabalho, cabe destacar que na proposta acima não há menção ao fato do conhecimento físico, em particular suas relações, se organizar formalmente fazendo uso da linguagem matemática. O passo 1 desconsidera a dificuldade de transformar a situação analisada em um modelo conceitual, reduzindo esse processo à construção de uma representação pictórica. O passo 2 se reduz a uma mera "seleção" de relações dentre várias possíveis, quando na verdade as relações a serem obtidas nesta etapa decorrem do tipo de modelo conceitual construído na etapa anterior. A etapa 3 refere-se ao que destacamos no início deste texto como habilidades técnicas, pois se limitam ao correto uso dos algoritmos, ou ao uso instrumental dos mesmos. E a etapa 4 seria uma forma de cotejar o resultado obtido com a pergunta originalmente proposta. Vale dizer que uma boa parte dos problemas tradicionais de Física poderia ter suas estratégias de solução sintetizadas dessa forma. Mas a pergunta pertinente neste momento é se essas estratégias se relacionam ao contexto original do processo de resolução de problemas, ou se se trata de uma re-leitura que visa a justificá-los *a posteriori*? Ou seja, estar-se-ia esquematizando um discurso sobre o contexto da justificativa ou extraindo estratégias de solução do contexto da descoberta, nos termos propostos por Reichenbach?

Um ponto de controvérsia importante entre os que se dedicam/ram às pesquisa está relacionada à concepção de Resolução de Problemas como desenvolvimento de habilidades i) *gerais* ou ii) atrelada a conhecimentos *específicos*. Segundo Echeverría e Pozo (1998), “o treinamento para a solução de problemas não deve apoiar-se tanto no desenvolvimento de capacidades gerais, mas em proporcionar ao aluno conhecimento específico de seu domínio” (p. 31). Nessa mesma linha, Zylbersztajn (1998) fundamenta-se na epistemologia kuhniana para argumentar em favor do enfoque nos conteúdos específicos, destacando a importância dos problemas *exemplares*, presentes nos manuais didáticos, como disseminadores de uma tradição científica. Segundo a proposta de Kuhn, os problemas exemplares ou problemas-tipo são um dos elementos que determinam a *matriz disciplinar*, noção introduzida por ele no posfácio da Estrutura das Revoluções Científicas para melhor delimitar o significado do termo *paradigma* (KUHN, 2001).

Esses e outros autores costumam basear a análise dessas habilidades específicas na comparação do desempenho de um *expert* com o de um iniciante quando os mesmos se deparam com problemas. Essa comparação evidencia que especialistas (*experts*) se sobressaem em relação aos iniciantes porque investem menos tempo no problema, reconhecem rapidamente os atributos essenciais para a solução do mesmo e aplicam os procedimentos quase que “automaticamente” fazendo com que um problema se torne um simples exercício (LARKIN et al., 1980; ECHEVERRÍA e POZO, 1998). Paradoxalmente, os especialistas procuram evitar situações novas ou desconhecidas, porém, diante de um problema realmente novo, estes podem recorrer a seus conhecimentos conceituais, bem estruturados, para gerar modelos ou analogias dos quais possam ser derivados procedimentos ou estratégias de resolução diferentes. Nessa direção é sintomático o trabalho realizado pelos cientistas na formulação do eletromagnetismo na metade do século XIX, que se desenvolveu a custas de comparações com outros domínios da Física, como o Calor e os Fluidos, por meio de analogias materiais e formais (SILVA, 2007).

Em função da crescente matematização da Física, devidamente assumida nos trabalhos de Galileu, é possível supor que os especialistas em resolução de problemas de Física tenham mais clareza e convicção quanto ao papel da Matemática e sejam mais hábeis em apreender matematicamente os fenômenos do mundo físico do que os iniciantes. Dessa forma, se a Matemática é a linguagem que estrutura o pensamento físico (PIETROCOLA, 2002), essa função precisa ser explicitada e discutida quando os estudantes se deparam com os problemas escolares. Conforme pretendemos mostrar, essa questão não vem sendo devidamente enfatizada pelos autores que se dedicam ao tema.

DISTORCENDO O PAPEL DA MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

> [...] a análise matemática é tão extensiva quanto a própria Natureza; ela define todas as relações perceptíveis, mede tempos, espaços, forças, temperaturas [...] Ela associa fenômenos os mais diversos e descobre as analogias ocultas que os unem [...] [A análise matemática] parece ser uma faculdade da mente destinada a compensar a reduzida duração da vida e a imperfeição dos sentidos (FOURIER, apud ABRANTES, 1998, p. 168).

Já mencionamos a patente diferença existente entre o processo de resolução de problemas da vida cotidiana e os problemas científicos. Pozo e Crespo (1998) são taxativos quanto a essa diferença quando mencionam que os "problemas cotidianos terminam onde começa o problema científico" (p. 69) e destacam o papel fundamental dos modelos de representação da realidade para o conhecimento científico:

> Não se trata tanto de conhecer a realidade – como as coisas acontecem – mas de conhecer o grau de precisão dos modelos projetados para interpretá-la ou representá-la. Em outras palavras, **a ciência não resolve problemas reais, mas teóricos**. Não questiona a realidade, mas seus próprios modelos. Nisso, o conhecimento científico difere consideravelmente do conhecimento pessoal ou cotidiano dos alunos (POZO e CRESPO, 1998, p.72, grifo nosso).

Como conseqüência dessa notável diferença entre problemas cotidianos e científicos, é evidente que as formas de raciocínio (heurísticas) necessárias para a solução destes também difiram muito das comumente evocadas para a solução daqueles. Resgatando algumas idéias de Bachelard (1990), o qual propõe que o conhecimento de senso comum (racionalismo simples) entrava o desenvolvimento de nosso conhecimento objetivo (racionalismo completo), Echeverría e Pozo (1998) argumentam:

> O uso de estratégias mais sofisticadas para a solução de problemas exigiria, então, em determinados contextos escolares e não escolares, a superação ou o abandono dessas formas simples ou intuitivas de raciocínio. Afinal, o discurso e a racionalidade na qual se sustentam costumam ser contrários à intuição imediata e à racionalidade do "senso comum". Em muitos aspectos, resolver um problema como o faria um cientista requer a adoção de estratégias e procedimentos opostos à intuição ou às regras heurísticas habitualmente empregadas em contextos informais. Por isso, o ensino da solução de problemas deve promover e **consolidar o uso de novas formas de raciocínio** nas diferentes áreas do currículo (ECHEVERRÍA e POZO, 1998, p.39-40, grifo nosso).

Segundo os autores, essas novas formas de raciocínio que compõem o pensar científico, e que não estão presentes na racionalidade do "senso comum", são o raciocínio quantitativo, o lógico e o causal. Em virtude dos objetivos deste trabalho, vamos direcionar nosso foco para uma análise de como vem sendo tratado o papel da linguagem matemática como estruturante do pensamento físico em pesquisas que tratam da Resolução de Problemas no ensino de Física (POZO e CRESPO, 1998). Questionamos alguns aspectos presentes na visão desses autores em relação à concepção do raciocínio quantitativo e ao papel de problemas quantitativos no ensino de Física. A nosso ver, existe uma concepção ingênua/ferramental no que diz respeito às relações entre o conhecimento matemático e o físico, a qual pretendemos evidenciar e questionar na seqüência.

Dentre as inúmeras possibilidades de classificação de problemas, Pozo e Crespo (1998) defendem que no ensino de ciências existiriam três categorias a serem consideradas: os problemas científicos, os problemas da vida cotidiana e os problemas escolares. Focando sua análise naqueles abordados no contexto escolar, os autores mencionam uma vasta categorização presente na literatura específica: problemas abertos e fechados; problemas bem e mal definidos; exercícios e problemas verdadeiros; problemas de "lápis e papel" e problemas práticos, entre outras. Levando em consideração a forma como os problemas escolares são trabalhados em sala de aula e seus objetivos educacionais, Pozo e Crespo (1998) propõem uma classificação de todos eles em três grupos: *problemas qualitativos, problemas quantitativos e pequenas pesquisas* (p. 78). Em função dos objetivos deste trabalho, analisaremos somente os dois primeiros[1]:

Problemas qualitativos – segundo os autores, são aqueles problemas que envolvem raciocínios teóricos, **sem necessidade de se apoiarem em cálculos numéricos** (POZO e CRESPO, 1998, p. 78, grifo nosso).

Pelos exemplos apresentados, estes problemas demandam **explicações** causais de fenômenos "mais ou menos" cotidianos, tais como *Por que a roupa seca mais rapidamente em dias de vento?, Por que o céu é azul?* ou *Por que usamos roupas de lã para nos protegermos do frio?* Chama-nos atenção, entretanto, a ênfase dada pelos autores de que os problemas qualitativos se definem em oposição àqueles que contêm cálculos. Qual seria, por exemplo, o papel dos problemas literais nesse processo? Não é necessário neste tipo de problema, fazer uso de uma linguagem matemática e de modelos expressos nessa linguagem, mesmo que não sejam abordados cálculos numéricos propriamente ditos? Para os autores, existe diferença entre os cálculos numéricos e o pensamento matemático? Quando se expressa uma relação entre grandezas na língua materna, por exemplo, *quanto mais isso, mais aquilo*, não se está utilizando um pensamento genuinamente matemático?

Pesquisas recentes que analisam a forma como as explicações científicas são conduzidas em sala de aula (MARTINS et al., 1999) evidenciam que a estrutura das mesmas para este tipo de questionamento são análogas a estórias, nas quais é preciso apresentar aos estudantes certas

---

[1] Segundo os autores pequenas pesquisas são "aqueles trabalhos nos quais o aluno deve obter respostas para um problema por meio de um trabalho prático (tanto no laboratório escolar como fora dele)." (POZO e CRESPO, 1998, p. 82)

"entidades" (átomo, força, calor, etc.) e descrever o papel e comportamento que esses protagonistas desempenharão na composição de estórias que compõem a estrutura explicativa. Porém, para definir o papel e a função dessas entidades é fundamental colocá-las dentro de uma perspectiva teórica que lhes dê sentido e regulamente seu comportamento. Por exemplo, como tratar o azul do céu sem indicar que a entidade "onda eletromagnética" tem seu comportamento de espalhamento na atmosfera determinado pela relação entre o ângulo de espalhamento e a freqüência?

Problemas quantitativos – segundo Pozo e Crespo (1998), ao resolver esse tipo de problemas, o aluno deverá **manipular dados numéricos** e trabalhar com eles para chegar a uma solução. Assim, a estratégia de resolução destes problemas está fundamentalmente **baseada no cálculo matemático, na comparação de dados e na utilização de fórmulas** (POZO e CRESPO, 1998, p.80, grifo nosso).

Nos três exemplos apresentados pelos autores (p. 81) como problemas quantitativos, todos envolvem dados numéricos, sendo que os dois primeiros podem ser resolvidos quase que diretamente pela simples aplicação de fórmulas dadas, enquanto que no terceiro é pedido que o estudante expresse matematicamente, por meio de uma função, a relação entre duas grandezas (tempo e pressão) a partir dos dados fornecidos em uma tabela. Os autores mencionam que este tipo de problema é o mais comum no contexto da educação científica e chegam a destacar as vantagens de sua abordagem:

> Geralmente, [os problemas quantitativos] são um meio de treinamento que, ao familiarizar os alunos com o **manejo de uma série de técnicas e algoritmos**, ajuda-os a fornece-lhes os instrumentos necessários para abordar problemas mais complexos e mais difíceis. A **quantificação**, por sua vez, permite **estabelecer relações simples entre as diversas magnitudes científicas**, o que facilita a compreensão das leis da natureza (POZO e CRESPO, 1998, p.80, grifo nosso).

Este trecho já evidencia uma supervalorização da quantificação e, em nossa opinião, reflete uma visão ingênua/distorcida em relação ao papel da Matemática na estruturação do pensamento científico. Porém, é quando os autores pretendem destacar as/os desvantagens/inconvenientes do uso de problemas quantitativos na educação científica, que a concepção de Matemática como uma "mera" ferramenta fica ainda mais evidente:

> Nos problemas quantitativos aparecem juntos, em muitos casos, **superpostos o problema matemático e o problema científico. Onde está a fronteira entre eles? Onde termina um e começa o outro?** […] os alunos consideram ter resolvido um problema quando obtêm um número (solução matemática), sem parar para pensar no significado desse número dentro do contexto científico no qual está enquadrado o problema (solução científica) (POZO e CRESPO, 1998, p.81, grifo nosso).

Quão **artificial** é essa separação entre problema matemático e problema científico? Que fronteira é essa que os autores mencionam? Será possível admitir que a solução matemática é mesmo somente um número e ao mesmo tempo, considerar que a solução científica prescinde de uma matematização?

Um exemplo interessante que elucida nossos questionamentos e comprova a artificialidade dessa separação, é fornecido por Roque (2005) por meio de uma análise epistemológica. Debruçando-se sobre um problema de importância histórica notável - a questão da estabilidade no estudo da Teoria dos Sistemas Dinâmicos - a autora mostra claramente a impossibilidade de dissociar esses dois aspectos (o matemático e o científico), o que parece evidenciar a fragilidade da postura demonstrada por Pozo e Crespo (1998) em relação aos inconvenientes dos problemas quantitativos. Segundo Roque:

> Uma análise que **considere separadamente os aspectos físico e matemático de um problema** pressupõe, mesmo que implicitamente, que a Física trabalha com a realidade, ao passo que a Matemática deve fornecer as condições formais para a descrição física desta realidade. O preço dessa suposição é o de relegar, ao mesmo tempo, a Física a um saber incapaz de se legitimar a si mesmo e a Matemática a uma abstração, a uma mera formalização sem mundo. **Este preço é alto, pois tem por conseqüência um enfraquecimento de ambas, tanto da Matemática como da Física** (ROQUE, 2005, p. 292, grifo nosso).

Na conclusão de sua análise epistemológica, a autora defende que a “estabilidade é um problema físico-matemático por excelência” e reforça a artificialidade de tentativas de separação/distinção entre os aspectos matemático e científico (físico) de um problema. Seguindo essa mesma linha, encontramos críticas semelhantes proferidas pelo matemático/físico/filósofo francês Henri Poincaré. Colocando-se como um analista puro, Poincaré (1995) evidencia a íntima e profunda relação entre o conhecimento matemático e o físico ao argumentar que:

> O matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima. A física matemática e a análise pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; **penetram-se mutuamente, e seu espírito é o mesmo** (POINCARÉ, 1995, p. 90, grifo nosso).

No final de sua apresentação sobre o uso de *problemas quantitativos* no ensino de ciências, Pozo e Crespo (1998) revelam claramente suas concepções em relação ao papel desempenhado pela Matemática na resolução de problemas científicos, evidenciando assim o caráter de “simples” ferramenta/instrumento que os autores associam a ela:

> Se quisermos ensinar ciências e ensinar a resolver problemas de ciências, devemos levar em consideração que **os dados numéricos e as fórmulas são um simples instrumento de trabalho** que nos ajuda a encontrar o sentido do problema e a sua solução. O sentido está além dos valores numéricos. Somente se os professores estiverem convencidos disso e agirem de acordo com essa convicção os alunos começarão a perceber nos problemas quantitativos algo mais do que problemas matemáticos (POZO e CRESPO, 1998, p.82, grifo nosso).

Se a Matemática fornecesse apenas "simples fórmulas" para manipular os "dados numéricos", isso indicaria que o cientista (físico) poderia até prescindir de um uso mais "íntimo" da mesma. Contrariando essa visão e evocando a importância fundamental da linguagem matemática como forma de estruturar o pensamento científico, principalmente em relação ao pensamento analógico, recorremos novamente a Poincaré (1995) para refletir:

> A Análise Matemática [...] não será, portanto, um jogo inútil do espírito? Ela só pode dar ao físico uma linguagem cômoda; não será esse um serviço medíocre, do qual se poderia até prescindir? E não seria até mesmo o caso de temer que essa linguagem artificial seja um véu entre a realidade e o olho do físico? Longe disso: **sem essa linguagem, a maior parte das analogias íntimas das coisas permaneceria para sempre fora de nosso conhecimento; e teríamos sempre ignorado a harmonia interna do mundo, que é a única verdadeira realidade objetiva** (POINCARÉ, 1995, p. 8, grifo nosso).

Admitindo que a Matemática não é uma mera "ferramenta" para o físico e que os aspectos matemático e científico de um problema são praticamente indissociáveis, como devemos explicitar as complexas relações entre o pensamento físico e o matemático no ensino de Ciências? Esboçamos respostas a esta pergunta nas seções seguintes deste artigo.

HABILIDADES TÉCNICAS X HABILIDADES ESTRUTURANTES

> Se a matemática é a linguagem que permite ao cientista estruturar seu pensamento para apreender o mundo, o ensino de ciências deve propiciar meios para que os estudantes adquiram esta habilidade. [...] **não se trata apenas de saber Matemática** para poder operar as teorias físicas que representam a realidade, mas **saber apreender teoricamente o real através de uma estruturação matemática** (PIETROCOLA, 2002, p.110-111, grifo nosso).

Aderindo à afirmação expressa na citação acima, não basta saber Matemática, **é preciso ensinar os alunos a pensar matematicamente quando se deparam com problemas de Física**. Em outro trabalho (PIETROCOLA, 2008), propõe duas categorias para analisar a aprendizagem de Matemática dos estudantes e sua relação com a compreensão/modelagem dos fenômenos do mundo físico: *habilidades técnicas e habilidades estruturantes*. A primeira categoria refere-se ao campo mais "interno" da Matemática e está relacionada ao domínio instrumental de algoritmos, regras, fórmulas, gráficos, equações, etc. Tradicionalmente, essas habilidades são desenvolvidas no contexto do ensino da Matemática como disciplina e nem sempre estão relacionadas com qualquer tipo de aplicação e/ou situação-problema. Muitos professores de Física vinculam o insucesso de seus estudantes à falta dessas *habilidades técnicas* e não é raro encontrarmos depoimentos de docentes mencionando que seus estudantes não sabem: *"dividir com vírgula, isolar uma variável, construir um gráfico, resolver uma equação, calcular um determinante, etc, etc, etc..."*. Ainda mais comum, e talvez mais preocupante, é aquela "famosa" frase que costuma ser proferida depois da "interpretação" de um problema de Física: "*Agora a Física acabou, daqui em diante é só Matemática*."

É inegável que a capacidade de manipular tecnicamente muitas das "ferramentas matemáticas" (*habilidades técnicas*) é **necessária** para um bom desempenho dos estudantes na disciplina de Física (Hudson & McIntire, 1977; Hudson & Liberman, 1982). Entretanto, apesar de necessária, essa condição está **longe de ser suficiente**, ou seja, não é possível afirmar que os estudantes que as dominam serão bem sucedidos em Física. Ao realizarem testes para medir o conhecimento técnico de fundamentos de Álgebra e Trigonometria no início de um curso de Física Básica, Hudson & McIntire (1977) constataram que o mesmo serviu como um instrumento que possibilitou "a previsão do fracasso, mas não a garantia do sucesso" dos estudantes (Hudson & McIntire, 1977, p. 470). Este resultado parece corroborar a afirmação de Pietrocola, de que o domínio técnico da matemática, embora necessário, não é suficiente.

Esta insuficiência é muito bem explicada por Redish (2005) quando defende que "utilizar Matemática em Ciências (principalmente em Física) não é somente fazer Matemática" (p. 1). Segundo o autor, o uso da Matemática na Física tem um objetivo diferente, pois se destina a representar sistemas físicos, ao invés de expressar relações abstratas. Além disso, Redish (2005) argumenta que a Matemática utilizada na Física possui uma semiótica diferente: "é quase como se a "linguagem" da Matemática que se usa na Física fosse diferente daquela ensinada pelos matemáticos" (REDISH, 2005, p. 1). Na condição de físico, o autor fornece os seguintes argumentos para fundamentar essas diferenças:

- *Nós* [os físicos] *damos nomes diferentes às constantes e às variáveis*;
- *Nós ocultamos/ofuscamos a distinção entre constantes e variáveis*;
- *Nós utilizamos símbolos para representar idéias em vez de quantidades;*
- *Nós misturamos as "coisas da Física" com "coisas da Matemática" quando interpretamos as equações;*
- *Nós atribuímos significado aos nossos símbolos;*

Alguns problemas são apresentados por Redish (2005) com o objetivo de exemplificar situações propícias a lidar com essas diferenças. Dentre elas, encontramos o clássico experimento do carrinho de *Fletcher*, no qual tradicionalmente deve-se calcular a aceleração do sistema e a tração no fio que une os blocos (Fig. 1):

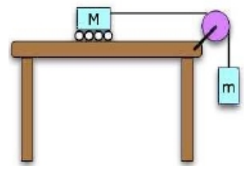

Figura 1: Problema do carrinho de Fletcher (REDISH, 2005, p. 5)

O autor propõe que se deve ao solicitar aos estudantes que calculem a aceleração do sistema para casos extremos/limites como m → 0, M → 0, m >> M ou M >> m. Pode-se "exemplificar uma postura que consiste em considerar uma gama de experimentos ao invés de um único e também evidencia a habilidade física de tratar constantes (massas) como variáveis" (REDISH, 2005, p. 5, tradução nossa).

De maneira semelhante, Pospiech (2006) sugere a existência de uma diferença semântica e apresenta o seguinte quadro relacionando conceitos matemáticos e seus respectivos correspondentes, com interpretações e significados distintos, na Física.

Matemática	***Física***
Números	Números com unidades
Fração	Relação
Função em sentido ab	Relações funcionais entre grandezas físi
Objetos geométricos	Representações simbólicas de sistemas f
Derivada	Taxa de variação
Integral	Soma de infinitos infinitesimais

Tabela 1: Diferenças semânticas entre representações em Matemática e Física (POSPIECH, 2006, p. 8)

Em sua tese de doutorado, Tuminaro (2004) também defende que a Matemática utilizada na Física possui uma semântica diferente daquela ensinada pelos professores de Matemática. Essa defesa é fundamentada em três dimensões: 1) os estudantes têm dificuldade de mapear/traduzir conceitos dos cursos de Matemática para os cursos de Física; 2) existem diferenças ontológicas entre a Matemática ensinada nos cursos de Matemática e a Matemática necessária nos cursos de Física (citando como exemplos as diferenças entre Força e Resultante das Forças, constantes universais e parâmetros experimentais, variáveis dependentes e independentes, condições iniciais e de contorno, etc.) e 3) os estudantes acham que existe uma diferença entre a "Matemática das aulas Física" e a "Matemática das aulas de Matemática" (essa afirmação é baseada na análise das falas dos próprios estudantes).

Pensemos em um simples exemplo para ilustrar essas possíveis diferenças semânticas. Consideremos as seguintes equações físicas: $V = R.i$, $E = h.f$ e $v = \lambda.f$. Matematicamente, todas essas expressões poderiam ser encaradas como uma relação linear do tipo $y = kx$. Graficamente, é possível representar uma função linear como uma reta que passa pela origem e cuja inclinação (tangente do ângulo (α) que a reta faz com a horizontal) é dada pela constante k (Figura 2). Aqui, x tradicionalmente representa a variável independente, y a variável dependente e k a constante de proporcionalidade.

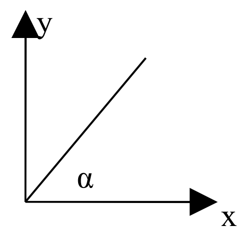

Figura 2: Gráfico da função linear $y = kx$ para $x \geq 0$

Uma rápida discussão sobre a situação física que cada uma das fórmulas pretende representar evidencia que, apesar da estrutura matemática aparentemente semelhante, existem diferenças extremamente significativas entre as mesmas. Em primeiro lugar não é tão nítida a separação entre variáveis dependentes e independentes. Na relação entre tensão e corrente (conhecida por lei de Ohm), por exemplo, é possível medir a corrente para obter a tensão, medir tensão para obter a corrente ou ainda, talvez o mais comum, seja medir tensão e corrente para se obter a resistência de um fio condutor. Em contraposição, para a relação $E = hf$, não existe o menor sentido prático em se determinar a constante, uma vez que se trata de um valor universal conhecido como constante de Planck. Enquanto a resistência de um fio pode mudar, a **constante** de Planck sempre será igual a $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J.s. Outra diferença notável é que a energia (E) de um fóton não é uma função contínua de sua freqüência (f), uma vez que, para uma determinada freqüência, a energia só pode assumir valores múltiplos de hf. Essa hipótese, conhecida como quantum de ação, fica claramente justificada no trabalho em que Einstein detecta uma incoerência formal na tentativa de explicar a emissão de radiação térmica conciliando as funções contínuas da teoria eletromagnética de Maxwell com as funções discretas que representam somas sobre átomos e elétrons da termodinâmica[2].

[2] Uma boa tradução comentada dos trabalhos de Einstein de 1905 pode ser encontrada em Stachel, 2001.

Para a equação fundamental da ondulatória ($v = \lambda.f$) a diferença semântica é ainda mais gritante. Isso porque a velocidade e a freqüência de uma onda dependem de fatores diferentes. Enquanto a velocidade é influenciada pelas características do meio (elasticidade e inércia), a freqüência é dependente apenas da fonte. Dessa forma, uma alteração na freqüência de uma onda **não** provoca uma mudança em sua velocidade e vice-versa! O comprimento de onda λ está longe de ser uma constante. Na realidade é justamente esse parâmetro que varia para garantir a validade da equação e não haveria sentido físico algum em se traçar uma reta (v x f) na qual λ representasse a inclinação.

Exemplos como os citados acima são ilustrativos para refletirmos sobre como enfrentar as dificuldades que os estudantes sentem ao aplicar Matemática para resolverem problemas de Física. Uma prática bastante comum nas universidades e escolas brasileiras, quando se detecta dificuldades dessa natureza, é recomendar aos estudantes que participem de cursos de Matemática Básica, nivelamento, preparação para o cálculo e similares. Parece-nos, entretanto, que essa prática não se justifica diante da constatação de que não basta saber Matemática para usá-la conscientemente ao pensar e resolver problemas de Física.

Diante do exposto, podemos retomar a segunda categoria proposta por Pietrocola (2008), a qual foi intitulada *habilidades estruturantes* e é entendida pelo autor como a capacidade de se fazer um uso organizacional da Matemática em domínios externos a ela (especialmente em Física). Em outras palavras, podemos entendê-la como a habilidade de pensar matematicamente os fenômenos do mundo físico, ou, de ler esse mesmo mundo por meio de uma linguagem matemática, ou ainda, de estruturar o mundo físico por meio da matemática.

Naturalmente, a busca pelo desenvolvimento de *habilidades estruturantes* no ensino de Física passa pela discussão sobre modelos e modelização. Para Malvern (2000), "pensar como um físico significa pensar em modelos matemáticos" (p. 77). Entretanto, o processo de construção desses modelos (modelização) raramente é abordado no ensino e, de uma maneira geral, os alunos são apresentados a *modelos prontos*, encarados como espelhos fiéis da realidade e sem qualquer tipo de contextualização histórica (PINHO-ALVES et. al, 2001). Segundo Angell et al. (2008), os estudantes deveriam ser capazes de elaborar modelos a partir da identificação de variáveis e interpretação de equações, além de construir várias representações dos mesmos e transitar por elas. Para esses autores, "o ensino de Física deveria dar aos estudantes uma visão da natureza da Física como uma atividade de modelização, treinando-os para que se tornem capazes de construir e de interpretar modelos" (ANGELL et al., 2008, p. 257). Os mesmos defendem que a capacidade de modelização está fortemente associada à habilidade de transitar entre diferentes maneiras de se representar um fenômeno físico:

- *Conceitualmente* – utilizando palavras, mencionando conceitos e princípios;
- *Matematicamente* – a partir de relações algébricas (fórmulas);
- *Graficamente* – construindo um gráfico relacionando as quantidades envolvidas;
- *Pictoricamente* – desenhando esquemas e figuras que representem o fenômeno;
- *Experimentalmente* – realizando e interpretando um experimento.

Mas como se dá o processo de criação de um modelo? Inúmeros são os esquemas presentes na literatura que objetivam sintetizar o processo de modelagem matemática de fenômenos do mundo físico. Em função dos objetivos deste trabalho, apresentamos um deles na Figura 3, o qual foi retirado de Stewart (2007).

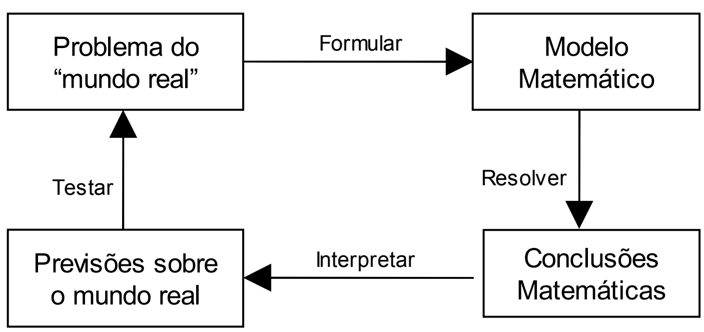

Figura 3: Mapa conceitual representando o processo de modelagem (STEWART, 2007, p. 25).

O primeiro passo, de acordo com o esquema, é partir do problema do "mundo real" e formular/mapear um modelo matemático. Quais as habilidades necessárias para se obter sucesso nessa etapa? O que difere um especialista de um iniciante em relação a essa capacidade? Ou ainda, que tipo de problemas devem ser propostos para instigar o desenvolvimento da capacidade de modelização matemática (*habilidades estruturantes*)?

Segundo Redish (2005), para formular/mapear o modelo matemático, é preciso "entender quais estruturas matemáticas estão disponíveis e quais são os aspectos das mesmas que são relevantes para as características físicas que se pretende modelizar" (REDISH, 2005, p. 7).

Nesse sentido, conforme já mencionamos, não basta saber operar mecanicamente as "ferramentas" matemáticas como funções, logaritmos, matrizes ou vetores. É necessário identificar os **aspectos essenciais** dessas estruturas para utilizá-las no processo de modelização de fenômenos físicos.

ASPECTOS ESSENCIAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA A FÍSICA

Quais seriam os aspectos essenciais e como podemos evidenciá-los aos estudantes? Naturalmente, essa resposta depende do fenômeno físico analisado e do contexto educacional em que se dá seu estudo. Entretanto, pretendemos exemplificar o que entendemos por *aspectos essenciais* de uma estrutura matemática a partir da discussão de uma abordagem diferenciada de problemas-tipo[3] (lápis e papel), nos quais as funções trigonométricas (seno e co-seno) aparecem como integrantes das "fórmulas" que os "solucionam". Consideremos inicialmente os seguintes enunciados:

1 – Uma força constante de intensidade F = 50N atua sobre um corpo numa direção que forma 60º com seu deslocamento horizontal. Sabendo que ele percorre 10m, determine o trabalho realizado por essa força.

2 – Calcule o momento do binário aplicado à barra de 2m de comprimento conforme o esquema a seguir considerando positivo o sentido horário.

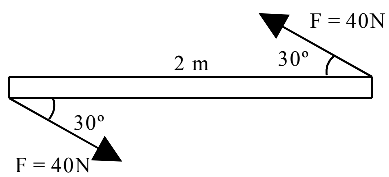

Figura 4: Barra submetida a um binário. Problema 2. Criada pelos autores.

3 – Uma pequena esfera eletrizada com carga q = 3 μC desloca-se com velocidade $|\vec{v}|$ = 300 m/s, cuja direção forma um ângulo de 30º com o vetor campo magnético $|\vec{B}|$ = 5. 10^{-2} T. Qual é o módulo da força magnética que agirá sobre a carga?

Tradicionalmente, esses problemas (ou exercícios, dependendo do contexto) podem ser resolvidos pela "simples" e cega aplicação de fórmulas matemáticas (1: W = F.d.cosθ; 2: M = F.d.senθ e 3: F = q.B.v.senθ)[4]. Muitos autores (GIL-PÉREZ et al., 1992, PEDUZZI e PEDUZZI, 2001, entre outros) criticariam prudentemente a abordagem dos mesmos, classificando-os como problemas fechados, e destacando que, ao resolvê-los, o aluno não é levado a formular hipóteses ou desenvolver estratégias. Não discordamos do posicionamento desses autores, entretanto, acreditamos que, mesmo para esses exercícios/problemas "clássicos", é possível

[3] Os problemas foram inventados pelos autores, mas exemplos semelhantes podem ser encontrados na grande maioria dos livros didáticos de Física.
[4] Omitimos propositadamente a notação vetorial para simular uma situação típica de Ensino Médio.

formular perguntas que instiguem os estudantes a refletir sobre o porquê da presença de determinadas estruturas matemáticas em fórmulas utilizadas na Física, fazendo com que os mesmos reflitam sobre algumas semelhanças existentes entre elas. Dessa forma, a capacidade de identificar **os aspectos essenciais** que justificam a presença de uma estrutura matemática em um modelo seria uma das mais relevantes *habilidades estruturantes* previamente mencionadas.

Para que essa identificação seja possível, sugerimos algumas “boas” perguntas para os três problemas propomos:

- Por que as funções trigonométricas (seno e co-seno) aparecem nas fórmulas matemáticas utilizadas na resolução destes três problemas? O que os mesmos têm em comum?
- Quais são os aspectos relevantes para que as funções trigonométricas sejam úteis como estruturas matemáticas para modelizar fenômenos físicos?
- Poderíamos trocar seno por co-seno (ou vice-versa) em cada um dos três problemas? Por quê?

Nos problemas/exercícios mencionados existe uma necessidade comum: achar a componente de um vetor em uma certa direção. Uma força só realiza trabalho quando possui uma componente na direção do vetor deslocamento, logo é necessário projetar um vetor na direção de outro e é justamente por isso que o co-seno do ângulo entre eles aparece na fórmula. Na realidade, trata-se de um produto escalar entre dois vetores, porém, em se tratando de uma explicação para estudantes do Ensino Médio, acreditamos que esses argumentos são suficientes. Para o problema 2, é possível constatar experimentalmente (basta tentar abrir uma porta) que uma força só é capaz de provocar a rotação de um corpo rígido em relação a um determinado eixo (torque/momento) se a mesma tiver uma componente na direção perpendicular ao vetor que liga o eixo de rotação ao ponto de aplicação da força, portanto, o seno do ângulo deve aparecer da fórmula. De modo semelhante, quando uma carga elétrica é lançada em uma região de campo magnético, a força magnética se manifesta quando há uma componente da velocidade na direção perpendicular à direção do campo, o que justifica novamente a presença do seno. Os dois últimos problemas são exemplos concretos do produto vetorial ($\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ e $\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B})$).

A discussão desses três exemplos permite evidenciar que o aspecto essencial que justifica a presença das funções trigonométricas (seno e co-seno) nas fórmulas que são aplicadas na resolução dos mesmos está associado à necessidade de se calcular **projeções** (co-seno – mesma direção e seno – direção perpendicular). Se isso for devidamente discutido e explicitado para o aluno, acreditamos que ele será capaz de compreender a real utilidade dessa estrutura matemática para a

Física e de utilizá-la em outros contextos que julgue pertinente, como no estudo de movimento de projéteis, plano inclinado, fluxo magnético, entre outros.

Outro aspecto que pode ser levantado na presente discussão dos três problemas é a mencionada diferença hipotética entre a Matemática das aulas de Matemática e a necessária para a descrição de fenômenos físicos. Em uma típica aula introdutória sobre o tema na disciplina de Matemática, seria bastante comum encontrarmos um professor desenhando um triângulo retângulo na lousa e definindo seno como a relação/razão entre o cateto oposto e a hipotenusa e co-seno como a relação/razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa[5]. Parece-nos que existe uma sutil diferença entre entender um seno (ou co-seno) como uma relação entre um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo (definição comum das aulas matemática) e perceber essas relações como projeções de vetores em direções ortogonais (interpretação mais comum na Física). A sensação é que de alguma forma, escrever $sen\alpha = \frac{F_y}{F}$ e $F_y = Fsen\alpha$, apesar de equivalentes, têm semânticas diferentes e isso pode contribuir para explicar por que os estudantes têm dificuldades em aplicar as relações trigonométricas na resolução de problemas de Física.

Apesar da relevância das funções trigonométricas no cálculo de projeções de vetores, as mesmas desempenham um papel possivelmente ainda mais importante para a descrição de certos fenômenos físicos. Consideremos agora esses outros três problemas:

4 – Um corpo de massa *m* está preso a uma mola de constante elástica *k*. O mesmo é deslocado uma distância *A* de sua posição de equilíbrio e então solto. Desprezando a ação de forças dissipativas, determine a posição do corpo em função do tempo.

5 – Uma onda transversal progressiva é gerada em uma corda. Conhecendo os valores da amplitude da onda (A), de sua velocidade de propagação (v) e da freqüência da fonte (f), escreva uma função que relacione a altura (y) de um determinado ponto da corda em função de sua posição (x) e do instante de tempo (t), ou seja, (y = f (x,t)).

6 – Um circuito LC (indutância L e capacitância C) é construído como mostra o esquema da figura. Considerando que a carga inicial no capacitor é Q_o, determine a carga no mesmo em função do tempo.

[5] Naturalmente, essa abordagem tradicional, descontextualizada, acrítica e direta dos conceitos matemáticos é altamente criticada pelos pesquisadores em Educação Matemática. Os próprios educadores que se dedicam à Modelagem Matemática (Bassanezi, 2002; Barbosa et. al, 2007; Bienbegut e Hein, 2005, entre outros) seriam os primeiros a condená-la. Entretanto, acreditamos que essa ainda seja a realidade na grande maioria das escolas brasileiras.

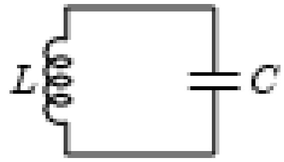

Figura 5: Circuito LC. Problema 6. Criada pelos autores.

As respostas às perguntas formuladas pelos problemas[6] são: 1) x(t) = A.cos$\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right)$; 2) y(x, t) = A.sen$\left(kx - \omega.t + \theta_o\right)$, onde $\omega = 2\pi f$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; 3) Q(t) = Q_o.cos$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t\right)$, as quais apresentam semelhanças incontestáveis. Mais uma vez as funções trigonométricas estão presentes e é possível chamar a atenção do aluno para o porquê das similaridades entre as fórmulas. As perguntas propostas anteriormente nos três problemas anteriores podem ser novamente formuladas:

- Por que as funções trigonométricas (seno e co-seno) aparecem nas fórmulas matemáticas utilizadas na resolução destes três problemas? O que os mesmos têm em comum?
- Quais são os aspectos relevantes para que as funções trigonométricas sejam úteis como estruturas matemáticas para modelizar fenômenos físicos?
- Poderíamos trocar seno por co-seno (ou vice-versa) em cada um dos três problemas? Por quê?

O aspecto essencial que justifica a presença das funções trigonométricas nestes últimos problemas é a **periodicidade** dos três fenômenos modelizados. Cabe destacar que uma conveniente alteração permite escrever as fórmulas em função de seno ou co-seno, uma vez que a periodicidade dessas funções é a mesma. É exatamente a constatação desses aspectos essenciais que estamos defendendo como uma das *habilidades estruturantes* a serem desenvolvidas/almejadas. Acreditamos que, ao perceber que fenômenos físicos periódicos são descritos por funções trigonométricas, o estudante terá condições de compreender os porquês dos modelos matemáticos em vez de simplesmente aplicar fórmulas "cegamente". Dessa forma, seria natural esperar que outros fenômenos periódicos como pêndulos e movimentos circulares, também sejam expressos por funções trigonométricas.

Mais uma vez podemos levantar algumas hipóteses sobre as eventuais diferenças entre as abordagens das funções trigonométricas nas aulas de Matemática e a maneira como as mesmas são empregadas na resolução de problemas de Física. Certamente, uma diferença considerável é que,

[6] O problema 6 não costuma ser abordado em nível médio. Para um tratamento no ensino superior, seria interessante mencionar a semelhança entre as equações diferenciais que descrevem os fenômenos, as analogias entre os mesmos e a importância do modelo do oscilador harmônico (F = -kx) para a Física.

nas aulas de Matemática, uma função trigonométrica (seno ou co-seno) é descrita como y = f(x) e, como vimos, em Física, o mais comum é tratá-la como uma função temporal (y = f(t)). Na resolução do problema 5, encontramos uma função de duas variáveis (f (x,t)) o que raramente é abordado nas aulas de Matemática do Ensino Médio. Além disso, outra diferença comum é relativa às variações dos períodos das funções trigonométricas, as quais costumam ser múltiplas da fundamental (sen2x, sen3x, cos4x, etc) enquanto que na Física essa variação é mais aleatória e dependente da freqüência da fonte.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise histórica/epistemológica do desenvolvimento do conhecimento científico evidencia a existência de complexas inter-relações entre o pensamento matemático e o físico desde sua mais remota essência. Encontramos nessa História tanto casos em que o formalismo matemático antecipou e direcionou as pesquisas/experiências em Física, como exemplos em que um problema físico serviu de motivação para o surgimento de novos objetos/conceitos matemáticos. Poincaré (1995) chegou a mencionar que a análise pura e a física matemática "penetram-se mutuamente" e possuem o "mesmo espírito".

Dessa forma, um dos objetivos do presente artigo foi criticar a visão ingênua/ferramental atribuída à matematização e a artificial tentativa de separação entre os aspectos matemático e físico, presentes em alguns trabalhos sobre resolução de problemas. Centramos nossa crítica na busca de um ingênuo/simples roteiro para resolução de problemas de Física (REIF et. al, 1976), na tentativa de distinção entre problemas matemáticos e científicos e na categorização de problemas quantitativos e qualitativos (POZO e CRESPO, 1998).

Outro aspecto relevante que decidimos destacar está relacionado a uma hipotética diferenciação semântica entre a Matemática estudada nas aulas de Matemática e a necessária para a resolução de problemas de Física. Para fundamentar nossa hipótese, exemplificamos a diferenciação entre o enfoque tradicionalmente dado a alguns objetos matemáticos pelos professores de Matemática e quando os mesmos são utilizados como modelos de fenômenos físicos. Nosso objetivo foi defender que o domínio de operações, regras e técnicas em Matemática (*habilidades técnicas*) é condição necessária, **mas não suficiente**, para se fazer um uso organizacional da mesma em domínios externos a ela, ou seja, é preciso que sejam desenvolvidas outras habilidades, as quais chamamos de *estruturantes*, para que o estudante seja capaz de pensar matematicamente para resolver problemas de Física.

Exemplificamos essas *habilidades estruturantes* a partir de uma discussão sobre os **aspectos essenciais** que fazem com que as funções trigonométricas sejam utilizadas para modelizar situações/problemas da Física. A partir da análise de seis problemas-tipo, argumentamos que as mesmas (seno e co-seno) são extremamente utilizadas na Física, principalmente, em duas situações: 1) quando se necessita calcular **projeções** de vetores, como foi o caso dos três primeiros problemas, ou 2) quando se quer representar grandezas **periódicas**, como nos três últimos. Nossa aposta é que se esses aspectos forem devidamente discutidos e explicitados para o aluno, ele será capaz de compreender a real utilidade dessa estrutura matemática e aplicá-la em outros contextos que julgue pertinente. Discussões semelhantes podem ser propostas com problemas que envolvam outras estruturas matemáticas como funções polinomiais, exponenciais, logaritmos, matrizes, etc.

Como nossos exemplos foram focados na trigonometria, cabe ressaltar a importância/influência de situações/problemas enfrentados pela Física para a gênese dos objetos matemáticos que a compõem. Uma breve incursão em textos da história da trigonometria nos evidencia sua íntima relação com a astronomia (KENNEDY, 1992). Mais recentemente (século XVIII), encontramos, na gênese dos estudos sobre séries trigonométricas, problemas físicos relacionados com o estudo de ondas em cordas (Euler, Bernoulli) e com a propagação do calor em meios sólidos (Fourier) (DAVIS e HERSH, 1995).

Sobre a influência de problemas da Física para a criação de objetos matemáticos, Poincaré (1995) menciona que

> O desejo de conhecer a natureza teve a mais constante e feliz influência sobre o desenvolvimento da matemática. [...] o físico nos propõe problemas cuja solução espera de nós. Mas ao nos propor esses problemas, já pagou com muita antecedência o favor que lhe poderemos prestar, se conseguirmos resolvê-los (POINCARÉ, 1995, p. 94).

Abordar a importância da Física para a gênese de conceitos/objetos matemáticos é igualmente fundamental para que possamos eliminar definitivamente essas artificiais tentativas de separação/distinção das partes matemática e física de um problema e para que o estudante tenha uma visão mais próxima da construção do pensamento científico. Dessa forma, a compreensão do papel da Física como fonte de motivação para a criação matemática também pode ser considerada como uma *habilidade estruturante*.

Para finalizar, vislumbramos perspectivas promissoras para a continuidade desse trabalho. Primeiramente, acreditamos que os atributos que definem a noção de *habilidades estruturantes* podem ser mais bem explorados e exemplificados, bem como o desenvolvimento de estratégias didáticas para desenvolvê-las. Outra perspectiva é a possibilidade de categorização de problemas a partir das habilidades necessárias para resolvê-lo. Parece-nos o enfoque nas habilidades exigidas para a resolução de um problema configura-se em um critério é mais rico e pertinente do que aqueles que preconizam distinções artificiais entre problemas matemáticos e científicos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. , *Imagens de natureza, imagens de ciência.* Campinas: Editora Papirus, 1998.

ANGELL, C.; KIND, P. M.; HENRIKSEN, E. K.; GUTTERSRUD, O. An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. *Physics Education*, v. 43, n. 3, p. 256-264, mai. 2008.

ASTOLFI , J. P., El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos, *Enseñanza de las ciencias*, v.12, n.2, p. 206 – 216, 1994.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BACHELARD, G. *O racionalismo aplicado.* Rio de Janeiro, Zahar, 1977.

__________________ . *Materialismo Racional.* Trad. Arthur Lopes Cardoso. Lisboa: Edições 70, 1990.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J. L. *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisa e práticas educacionais*. Recife, Editora da SBEM, 2007.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no ensino.* São Paulo, Contexto, 2005.

BUNGE, M. *Teoria e Realidade*. São Paulo: Editora Perspectiva S.A., 1974.

DAVIS, P.; HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Tradução Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva, 1995.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org) *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução Beatriz Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

GASPAR, A. A teoria de Vygotsky e o Ensino de Física. IV ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, *Atas* (CD-ROM), Florianópolis, 1994.

GIL-PÉREZ, D.; MARTINEZ-TORREGROSA, J.; RAMIREZ, L.; DUMAS-CARRÉ, A.; GOFARD, M.; CARVALHO, A. M. P. Questionando a didática da resolução de problemas: elaboração de um modelo alternativo. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, v. 9, n. 1, p. 7-19, abr. 1992.

HUDSON, H. T.; McINTIRE, W. R. Correlation between mathematical skills and success in physics. *American Journal of Physics*, v. 45, n. 5, p. 470-471, mai. 1977.

HUDSON, H. T.; LIBERMAN, D. The combined effect of mathematics skills and formal operational reasoning on student performance in the general physics course. *American Journal of Physics*, v. 50, n. 12, p. 1117-1119, dez. 1982.

KENNEDY, E. S. *História da trigonometria.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1992.
KUHN, T. *A Estrutura das Revoluções Científicas*, 6ª ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 2001.

LARKIN, J.; McDERMOTT J. SIMON, D. P.; SIMON H.A. Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems. *Science*, v. 208, n. 4450, p. 1335 – 1342, jun. 1980.

LEMKE, J. Multiplying Meaning: visual and verbal semiotics in scientific text. In: Martin, J. e Veel, R. (eds.), *Reading Science*. London, Routledge, 1998.

MALVERN, D. Mathematical Models in Science. In: GILBERT, J. K. & BOULTER, C.J. *Developing Models in Science Education.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

MARTINS, I.; OGBORN J.; KRESS, G. Explicando uma Explicação. *Ensaio*, v. 1, n. 1, p. 29-46, set. 1999.

MORTIMER, E. F. *Evolução do Atomismo em Sala de Aula: Mudança de Perfis Conceituais.* Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

PEDUZZI, L. O. Q. ; PEDUZZI, S. S., Sobre o papel da resolução literal de problemas no Ensino da Física: exemplos em Mecânica. In: *Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora.* Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

PIETROCOLA, M. A Matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. v.19, n.1, p.93-114, ago. 2002.
________________. *Mathematics as structural language of physical thought.* VICENTINI, M. and e SASSI, E. (org.). Connecting Research in Physics Education with Teacher Education volume 2, ICPE – book, 2008.

PINHO-ALVES, J.; PINHEIRO, T.F.; PIETROCOLA, M. Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da Matemática no conhecimento científico. In: *Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

POINCARÉ, H. *O Valor da Ciência*. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POSPIECH, G. Promoting the competence of mathematical modeling in physics lessons. *Proceedings do GIREP 2006* (Groupe International de Recherche sur l'Enseignement de la Physique) p. 575-583. Modelling in Physics and Physics Education. 20 a 25 de agosto de 2006, AMSTEL institute, Faculty of Science, University of Amsterdam, Netherlands. Disponível em <http://home.medewerker.uva.nl/o.slooten/bestanden/Girep%20Proceedings%20CD.pdf> Último acesso em 10 de novembro de 2008.

POZO, J. I.; CRESPO, M. A. G. A Solução de Problemas nas Ciências da Natureza. In: POZO, J. I. (org) *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Tradução Beatriz Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

REDISH, E. F. Problem Solving and the use of math in physics courses. Palestra proferida no evento, *World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change,* Delhi, 21 a 26 de agosto, 2005. A ser publicado nos *proceedings*. Disponível em <http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaMath.pdf> Último acesso em 14 de novembro de 2008.

REIF, F.; LARKIN, J. H.; BRACKETT, G. C. Teaching general learning and problem-solving skills. *American Journal of Physics*, v. 44, n. 3, p. 212-217, 1976.

ROQUE, T. Estabilidade: exigência física ou formalidade matemática? In: *Filosofia, Ciência e história: uma homenagem aos 40 anos de colaboração de Michel Paty com o Brasil* – PIETROCOLA, M. e FREIRE JR., O. (org) São Paulo: Discurso Editorial, 2005.

SILVA, C. C. The Role of Models and Analogies in the Electromagnetic Theory: a Historical Case Study. *Science & Education,* v. 16, n. 4: p. 835-848, 2007.

STACHEL, J. (org.) *O ano miraculoso de Einstein: cinco artigos que mudaram a face da física.* Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2001.

STEWART, J. *Cálculo*. volume 1, 5ª edição**.** São Paulo: Thomson Learning, 2007.

TUMINARO, J. *A cognitive framework for analyzing and describing introductory students' use and understanding of mathematics in physics*. Tese de Doutorado, Universidade de Maryland, College Park, 2004. Disponível em: <http://www.physics.umd.edu/rgroups/ripe/perg/dissertations/Tuminaro/> Último acesso em 8 de novembro de 2008.

TUMINARO, J.; REDISH, E. F. Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic Games. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, v. 3, n. 2, p. 1 a 22, 2007.

ZYLBERSZTAJN, A. Resolução de problemas: uma perspectiva kuhniana. In: VI ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, *Atas* (CD-ROM). Florianópolis, 26 a 30 de outubro, 1998.

Ricardo Avelar Sotomaior Karam: Engenheiro civil pela Universidade Federal do Paraná (2001), Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (2003), Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005) e

Doutorando em Educação pela Universidade de São Paulo. Foi professor de Matemática dos níveis fundamental e médio, de Física do Ensino Médio e, em nível superior, foi professor dos Departamentos de Física da Universidade Federal de Santa Catarina e da Universidade do Estado de Santa Catarina. Atualmente é professor efetivo de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina lecionando nos cursos de nível médio e superior. Dedica-se intensamente à formação de professores de Matemática e Física em cursos de capacitação, extensão e especialização. Os principais temas de pesquisa de seu interesse têm sido: no Ensino de Física - Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio, Relações entre Matemática e Física, História e Epistemologia da Ciência. Na Educação Matemática - Resolução de Problemas e História e Epistemologia da Matemática.

Maurício Pietrocola: possui graduação em Licenciatura em Física pela Universidade de São Paulo (1984), mestrado em Ensino de Ciências (Modalidade Física e Química) pela Universidade de São Paulo (1988) e doutorado em *Epistemologie Et Histoire Des Sciences - Universite de Paris VII* (1992). Atualmente é professor associado da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, membro correspondente da equipe RESHEIS/CNRS-Univ. Paris VII e vice-chair da International Comission on Physics Education (IUPAP). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Métodos e Técnicas de Ensino, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino de ciências, introdução de conteúdos modernos de Física e novas tecnologias no Ensino Médio, formação de professores, história e alfabetização científica.