Eletricidade e Magnetismo 2021 – Turma IME - IFUSP
Provinha 6 – Resolução

Uma barra condutora de comprimento ℓ gira com velocidade angular constante ω em torno de uma de suas extremidades.

a) (2,0) Mostre que a força magnética exercida sobre um elétron $q = -e$ a uma distânca r do eixo de rotação é $Ber\omega$.
Resolução:
Primeiro vamos definir um sistema de coordenadas cilíndricas com versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{z}$, com $\hat{r}$ sendo o versor radial, $\hat{\theta}$ o versor angular e $\hat{z}$ o versor perpendicular ao plano da tela e apontando para fora dela. Com isso, temos que $\vec{B} = -B\hat{z}$ e $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

Um elétron com carga $q = -e$ na barra a uma distância r do eixo de rotação se move com vetor velocidade:

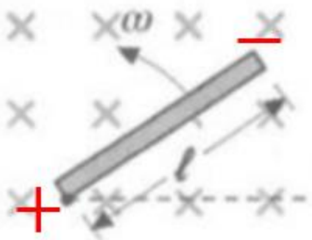
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\hat{z} \times r\hat{r} = \omega r\,\hat{\theta}$$

A força magnética que atua sobre esse elétron é dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\,\omega r\,\hat{\theta} \times (-B\,\hat{z}) = e\omega r B\,\hat{r}$$

Isso demonstra o que foi pedido no enunciado.

Observe que devido a ação desta força, os elétrons vão ser deslocados para a extremidade da barra mais oposta ao eixo de rotação, havendo um acúmulo de cargas negativas naquela região.



b) (3,0) Calcule a diferença de potencial entre as extremidades da barra e indique na figura qual a extremidade que tem o potencial negativo. Justifique sua resposta.

Resolução:

Dividindo a força que atua sobre os elétrons por suas cargas, obtemos um campo elétrico efetivo:

$$\vec{E}_{ef} = \frac{\vec{F}}{(-e)} = -B\omega r\,\hat{r}$$

Esse campo efetivo aponta na direção radial para dentro. Trabalhando em módulo e integrando o campo em r, achamos a fem:

$$|\mathcal{E}| = \int_0^{\ell} B\omega r\, dr = \frac{B\omega\ell^2}{2}$$

Se quiser fazer um tratamento mais preciso do sinal, considere

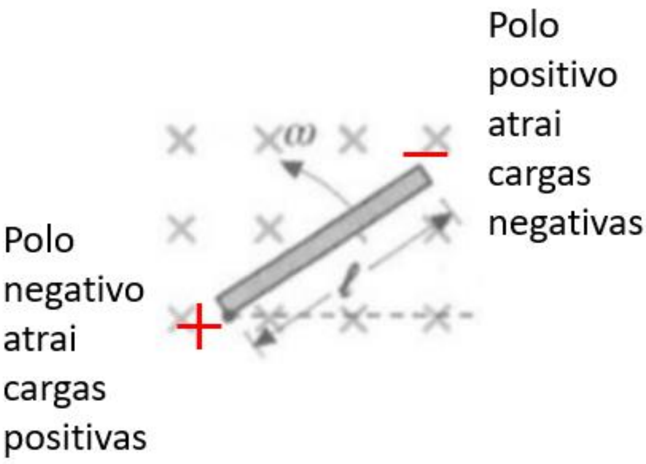
$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} \rightarrow V(0) - V(\ell) = -\int_{\ell}^{0} (-B\omega r)\, dr$$

Assim,

$$V(0) - V(\ell) = -\frac{B\omega\ell^2}{2}$$

Isso indica que $V(\ell) > V(0)$. Portanto, a extremidade com potencial positivo é a extremidade da barra oposta ao eixo de rotação. Observe que isso faz sentido pois o campo elétrico sempre aponta do potencial maior para o potencial menor (no caso, de fora para dentro).

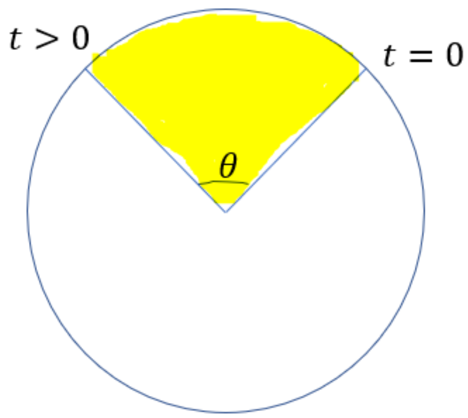
Outra justificativa possível é o movimento dos elétrons: sabemos que cargas negativas se movem em direção ao potencial positivo. Como os elétrons se movem na direção $+\hat{r}$, concluímos que o potencial positivo na extremidade da barra oposta ao eixo.



c) (2,0) Trace uma linha radial no plano fazendo um ângulo $\theta = \omega t$ com uma linha de referência traçada para $t = 0$. Mostre que a área da região varrida pela barra entre as duas linhas é dada por $A = \ell^2\theta/2$.

Resolução:

A seguir representamos a região varrida pela barra:



Corresponde a um setor circular de raio ℓ e ângulo θ, cuja área é dada por

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot A_{circulo} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi\ell^2 \to A = \frac{\ell^2\theta}{2}$$

d) (4,0) Calcule o fluxo através desta área e use a lei de Faraday para calcular a tensão induzida no perímetro delimitado por essa área. Como esta tensão induzida se compara com a diferença de potencial encontrada no item (b)? Comente seu resultado e diga se está coerente com a lei de Faraday.

Resolução:

Considerando a normal da superfície na qual calcularemos o fluxo apontando na direção $+\hat{z}$ (para fora da tela), o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = \vec{B} \cdot \hat{n}A = -B\hat{z} \cdot (+\hat{z}) \frac{\ell^2\theta}{2} = -\frac{B\ell^2\theta}{2}$$

Usando a lei de Faraday, temos que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B\ell^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Como $\omega = d\theta/dt$, segue que

$$\mathcal{E} = \frac{B\omega\ell^2}{2}$$

Observe que isso está em total acordo com o resultado do item (b)!