COMP III - 2/12/2021
ANOTAÇÕES

PROVINHA 3

w CONTÍNUA E POSITIVA EM (a,b) E TAL QUE

$$\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx$$

EXISTE P/ TODO POLINÔMIO.

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b w(x)\, u(x)\, v(x)\, dx \qquad (1)$$

$\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$: FAMÍLIA DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS EM RELAÇÃO A (1)

$$\begin{cases} \text{O GRAU DE } P_k \text{ É } k \\ \langle P_k, P_\ell\rangle = 0 \quad \text{SE} \quad k \neq \ell \end{cases}$$

PROPRIEDADE: SE q FOR UM POLINÔMIO DE GRAU m, ENTÃO

$$\langle P_k, q\rangle = 0, \quad \forall \; k > m \qquad (2)$$

(a) SE $k \geq 1$, ENTÃO P_k TEM PELO MENOS UMA RAIZ EM (a,b)

$q(x) \equiv 1$: POLINÔMIO DE GRAU ZERO. LOGO,

$$\langle P_k, 1\rangle = 0, \quad \forall \; k \geq 1$$

$$\int_a^b \underbrace{w(x)}_{>0 \text{ EM } (a,b)} P_k(x)\, dx = 0, \quad \forall \; k \geq 1$$

SE P_k NÃO SE ANULAR EM (a,b), ENTÃO P_k NÃO TROCARÁ DE SINAL EM (a,b) E A INTEGRAL ACIMA NÃO SE ANULARÁ

(b) PARA $K \geq 2$, TODA RAIZ $\bar{x}$ DE P_K EM (a,b) É SIMPLES

SUPONHA POR ABSURDO QUE $\bar{x}$ É UMA RAIZ DE P_K EM (a,b) COM MULTIPLICIDADE MAIOR OU IGUAL A 2. ENTÃO, PODEMOS ESCREVER

$$P_K(x) = (x-\bar{x})^2 q(x)$$

ONDE q É UM POLINÔMIO NÃO NULO DE GRAU $K-2$.

COMO $K-2 < K$, $\langle P_K, q \rangle = 0$. OU SEJA,

$$0 = \langle P_K, q \rangle = \int_a^b w(x) P_K(x) q(x) \, dx = \int_a^b \underbrace{w(x)}_{>0 \text{ EM } (a,b)} \underbrace{(x-\bar{x})^2 q(x)^2}_{\geq 0 \text{ EM } (a,b) \text{ NÃO NULO}} dx$$

CONTRADIÇÃO!

(c) P/ $K \geq 1$, P_K TEM K RAÍZES SIMPLES EM (a,b)

OBS: P/ $K=1$, NÃO HÁ O QUE DEMONSTRAR

SUPONHA QUE $K \geq 2$ E QUE P_K TEM $m < K$ RAÍZES (SIMPLES) EM (a,b). ENTÃO, PODEMOS ESCREVER

$$P_K(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_m)\cdot q(x),$$

ONDE $q(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. SEJA

$$q_m(x) = (x-x_1)\dots(x-x_m)$$

COMO q_m É UM POLINÔMIO DE GRAU $m < K$, $\langle P_K, q_m \rangle = 0$.

OU SEJA,

$$0 = \langle P_K, q_m \rangle = \int_a^b w(x)\, P_K(x)\, q_m(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, q(x)\, q_m^2(x)\, dx$$

POIS $P_K = q_m \cdot q$

CONTRADIÇÃO !

$w(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$
$q(x)$ NÃO TROCA DE SINAL EM (a,b)
$q_m^2(x) \geq 0$, NÃO É IDENTICAMENTE NULO

—————— // ——————

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$$
$$= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$$

$$P_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x_i + \cdots + a_n \cdot x_i^n = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$
$$1 \cdot a_0 + x_i \cdot a_1 + \cdots + x_i^n \cdot a_n = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

$\Rightarrow B \cdot a = y$

$b_{ij} = (x_i)^j, \quad 0 \leq i,j \leq n$

x	-1	0	1	2
2^x	0.5	1	2	4

$x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$
$y_0 = 0.5$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = 4$

OBS $\quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$; $\quad P(0) = a_0 \quad (0^0 = 1)$

F

$F' = 0$

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = (\ln 2) \cdot 2^x$$

ETC ...