Eletromagnetismo Avançado — 7600035 — 3 de dezembro de 2021

Solução da terceira prova

3 de dezembro de 2021

1. O campo elétrico de uma carga em movimento é dado pela expressão

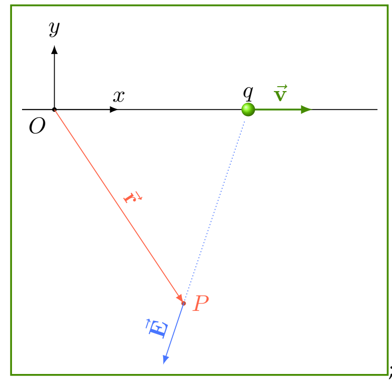
$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathscr{r}}{(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}})^3}[(c^2-v^2)\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathscr{r}}\times(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{a}})],$$

onde $\vec{\mathbf{u}} \equiv c\hat{\mathscr{r}} - \vec{\mathbf{v}}$. Uma carga que está em movimento uniforme com velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ passa pela origem do sistema da figura no instante $t=0$.

(a) Encontre, algebricamente, a direção do campo elétrico no ponto P, isto é, encontre um vetor cuja direção é paralela a $\vec{E}$;

(b) Reproduza o desenho da figura em sua prova e desenhe esquematicamente o campo elétrico nesse ponto, no instante retratado;

(c) Encontre o campo elétrico no ponto $(0,y)$ no instante $t=0$.



;

Figura 1: Questão 1. O vetor $\vec{\mathbf{E}}$, azul, é a resposta ao item (b).

2. A expressão deduzida em classe para o campo magnético de um dipolo que oscila com frequência ω na direção $\hat{z}$ é

$$B = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\cos\Big(\omega(t-\frac{r}{c})\Big).$$

A figura 1 mostra um dipolo com momento constante $\vec{\mathbf{p}}_0$ que gira em torno do eixo z com frequência angular ω. No instante $t=0$, o dipolo está alinhado com o versor $\hat{\mathbf{x}}$. Suponha que $\rho \gg \lambda \gg d$, onde d é o comprimento do dipolo.

(a) Encontre o momento magnético que o dipolo produz num ponto P com coordenadas cilíndricas $(\rho,\phi,z=0)$ em função do tempo.

(b) Em que instantes se anula o campo magnético no ponto P?

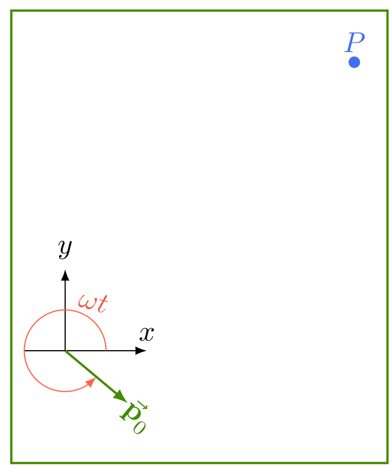


Figura 2: Questão 2

Solução

1(a) Como $\vec{\mathbf{a}}=0$, o campo elétrico tem a direção de $\vec{\mathbf{u}} = c\hat{\mathscr{r}} - \vec{\mathbf{v}}$. É mais fácil calcular o vetor $\mathscr{r}\vec{\mathbf{u}}$:

$$\vec{\mathbf{u}} = c\vec{\mathscr{r}} - \mathscr{r}\vec{\mathbf{v}}.$$

Como $\vec{\mathscr{r}} = \vec{\mathbf{r}} - t_r\vec{\mathbf{v}}$ e $\mathscr{r} = c(t-t_r)$, os termos proporcionais a t_r se cancelam e resulta que

$$\mathscr{r}\vec{\mathbf{u}} = c(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{v}}t).$$

O campo elétrico tem a direção de $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{v}}t$.

1(b) O vetor azul na Fig 1 mostra a direção do campo elétrico.

1(c) Para encontrar o campo, precisamos determinar $\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}}$. A Fig mostra a geometria. O produto escalar é $\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = \mathscr{r}u\cos\alpha$. Mas $\sin\alpha = (vt_r)/(ct_r) = v/c$. Segue que $\cos\alpha = \sqrt{1-(v/c)^2}$, e, portanto, $\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = \mathscr{r}u\sqrt{1-(v/c)^2}$. Como $t = 0$, do item 1(a) temos que $r\vec{\mathbf{u}} = cy\hat{\mathbf{y}}$. Dessa forma, encontramos o campo elétrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{\hat{\mathbf{y}}}{y^2},$$

ou seja, o campo de Coulomb realçado pelo fator $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

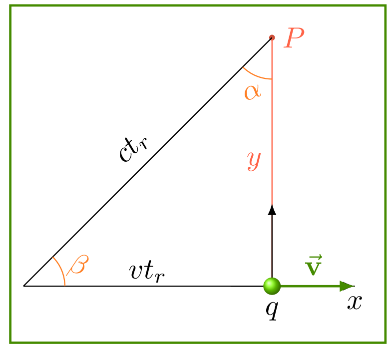


Figura 3: Solução da questão 1(c)

2(a) Nas coordenadas cilíndricas da Fig. 1, o ângulo azimutal do momento de dipolo $\vec{\mathbf{p}}_0$ é ωt, e o ângulo azimutal do vetor $\vec{\mathbf{r}}$ que aponta para P é ϕ. Projetado em coordenadas cartesianas, o momento tem componentes

$$p_x = p_0\cos(\omega t)$$
$$p_y = p_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$p_z = 0.$$

De acordo com a expressão dada, o campo produzido por cada componente é proporcional ao produto do momento de dipolo p_j ($j = x, y$) pelo seno do ângulo entre o versor correspondente ($\hat{\mathbf{x}}$ para $j = x$ ou $\hat{\mathbf{y}}$ para $j = y$) e o vetor $\vec{\mathbf{r}}$. Esse ângulo deve ser medido no sentido horário, porque o ângulo polar θ cresce no sentido horário.

A contribuição da componente x do dipolo é, portanto,

$$B_1 = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\mathrm{sen}(-\phi)}{r}\cos\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right),$$

enquanto a contribuição da componente y é

$$B_2 = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}-\phi)}{r}\sin\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right).$$

O campo total é a soma das duas contribuições:

$$B = \frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\mathrm{sen}(\phi)\cos\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right) - \cos(\phi)\sin\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right)}{r},$$

ou seja,

$$B = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\mathrm{sen}\left(\omega(t-\frac{r}{c})-\phi\right)}{r}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido como o campo produzido por um dipolo com momento fixo p_0 que forma ângulo $\theta = \omega(t - r/c) - \phi$ com o vetor $\vec{r}$. Algebricamente, é muito mais fácil, mas para fazer assim é preciso notar que θ é o ângulo que o dipolo formava com $\vec{\mathbf{r}}$ no instante da emissão da radiação $(t - r/c)$ [e não o ângulo $\omega t - \phi$ entre os dois no instante t].

2(b) O campo magnético é nulo nos instantes retardados $t - r/c$ em que o dipolo aponta para P ou no sentido oposto. Em outras palavras, é nulo quando

$$\omega t - \frac{r}{c} = \phi + n\pi,$$

onde n é um inteiro qualquer.