ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Dinâmica do Sólido – Parte 8

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

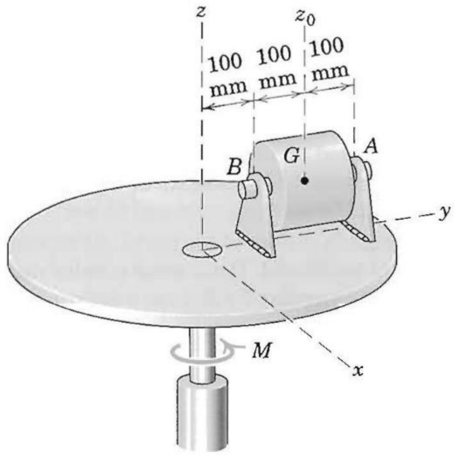
PME3100 Mecânica I

DINÂMICA DO SÓLIDO

Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

Exemplo 5.15: O cilindro de 12 kg sustentado pelos suportes dos mancais em A e B tem um momento de inércia em relação ao eixo vertical z_0 através de seu centro de massa G igual a 0,080 kg·m^2. O disco e os suportes têm um momento de inércia em relação ao eixo vertical z de rotação igual a 0,60 kg·m^2. Se um torque $M = 16\ N \cdot m$ é aplicado ao disco através do seu eixo, com o disco inicialmente em repouso, calcule as componentes horizontais em *x* das forças suportadas pelos mancais em A e B.

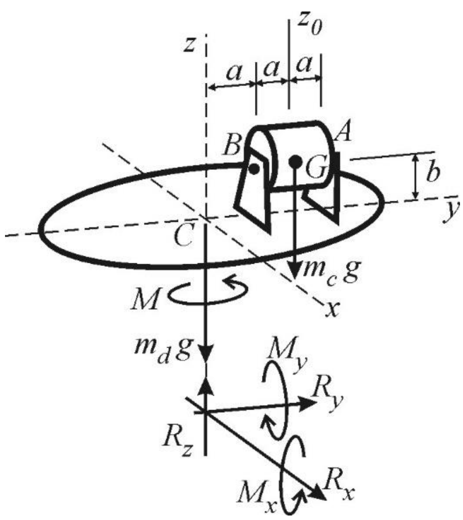


Resolução:

Conjunto:

$$J_{Cz} = J_{(conj)z} = J_{(disco)z} + \left[J_{(cilin)z_0} + m_{cilin}(2a)^2\right] =$$
$$= 0{,}60 + 0{,}080 + 12(2 \cdot 0{,}1)^2 = 0{,}60 + 0{,}080 + 0{,}48 = 1{,}16\ kg/m^2$$

TQMA, polo C, *(x, y, z)* solidários ao disco:



$$\vec{H}_C = -J_{Cxz}\omega\vec{\imath} - J_{Cyz}\omega\vec{\jmath} + J_{Cz}\omega\vec{k}$$

- plano *yz* de simetria: $J_{Cxz} = 0$

$$\dot{\vec{H}}_C = -J_{Cyz}\dot{\omega}\vec{\jmath} + J_{Cz}\dot{\omega}\vec{k} - J_{Cyz}\omega\dot{\vec{\jmath}} + J_{Cz}\omega\dot{\vec{k}} =$$
$$= -J_{Cyz}\dot{\omega}\vec{\jmath} + J_{Cz}\dot{\omega}\vec{k} - J_{Cyz}\omega\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\jmath}\right) + \vec{0} =$$
$$= J_{Cyz}\omega^2\vec{\imath} - J_{Cyz}\dot{\omega}\vec{\jmath} + J_{Cz}\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_C$$

Componente de $\vec{M}_C$ em $\vec{k}$ = M

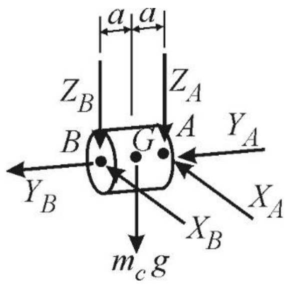
Assim: $J_{Cz}\dot{\omega} = M \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{M}{J_{Cz}} = \frac{16}{1{,}16} = 13{,}79\ rad/s^2$ (1)

Cinemática, entre os pontos *C* e *G*:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge \left(2a\vec{\jmath} + b\vec{k}\right) = -2\omega a\vec{\imath} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{a}_G = -2\dot{\omega}a\vec{\imath} - 2\omega a\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\imath}\right) = -2\dot{\omega}a\vec{\imath} - 2\omega^2 a\vec{\jmath}$$

Usando (1), a componente da aceleração de *G* em *x* será: $a_{Gx} = -2a\frac{M}{J_{Cz}}$ (2)

Cilindro:



TR, na direção *x*, usando (2): $m_c a_{Gx} = -X_A - X_B \Rightarrow X_A + X_B = \frac{2am_cM}{J_{Cz}} =$

$= \frac{2\cdot 0{,}1\cdot 12\cdot 16}{1{,}16} = 33{,}1$ N (3)

TQMA, polo G:

$\vec{H}_{G(cil)} = J_{zG(cil)}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_{G(cil)} = J_{zG(cil)}\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_{G(cil)}$

Componente de $\vec{M}_{G(cil)}$ em $\vec{k}$ = $aX_A - aX_B$

Assim: $J_{zG(cil)}\dot{\omega} = aX_A - aX_B \Rightarrow X_A - X_B = \frac{J_{zG(cil)}M}{aJ_{Cz}} = \frac{0{,}08\cdot 16}{0{,}1\cdot 1{,}16} = 11{,}03$ N (4)

Somando (3) e (4): $2X_A = \frac{2am_cM}{J_{Cz}} + \frac{J_{zG(cil)}M}{aJ_{Cz}} = 44{,}13 \Rightarrow \boldsymbol{X_A = 22{,}06}$ **N**

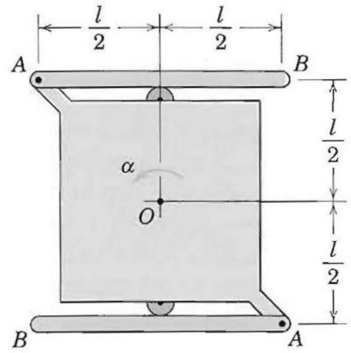
Subtraindo (3) e (4): $2X_B = \frac{2am_cM}{J_{Cz}} - \frac{J_{zG(cil)}M}{aJ_{Cz}} = 22{,}07 \Rightarrow \boldsymbol{X_B = 11{,}03}$ **N**

<u>Exemplo 5.16</u>: Duas barras delgadas AB, cada uma com massa m e comprimento l, são articuladas em A em relação à placa. A placa gira no plano horizontal em relação ao eixo vertical através do centro O recebendo uma aceleração angular constante α.

(a) Determine a força F exercida em cada um dos roletes quando o conjunto começar a girar.

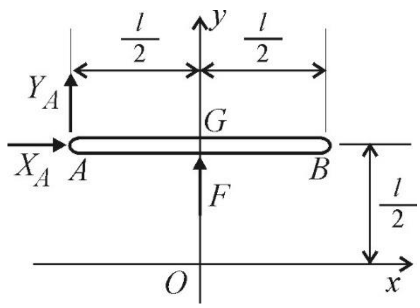
(b) Ache a força total no pino em A e mostre que ela permanece constante para toda força F > 0.

(c) Determine a velocidade angular ω na qual o contato com os roletes deixa de existir.



Resolução:

Os eixos (O,x,y) giram com a placa.



Cinemática: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] =$

$= \vec{0} + \alpha\vec{k} \wedge \left(\frac{l}{2}\vec{j}\right) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(\frac{l}{2}\vec{j}\right)\right] =$

$= -\alpha\frac{l}{2}\vec{i} - \omega^2\frac{l}{2}\vec{j}$

TR: $m\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (Y_A + F)\vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = -m\alpha\frac{l}{2} & (1) \\ Y_A + F = -m\omega^2\frac{l}{2} & (2) \end{cases}$$

TQMA: $\vec{H}_G = J_G\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \frac{ml^2}{12}\alpha\vec{k} = \vec{M}_G = -Y_A\frac{l}{2}\vec{k} \Rightarrow Y_A = -\frac{ml}{6}\alpha \qquad (3)$

(a) Força F: substituindo (3) em (2), com $\omega = 0$ (começa a girar):

$$\boldsymbol{F = \frac{ml}{6}\alpha}$$

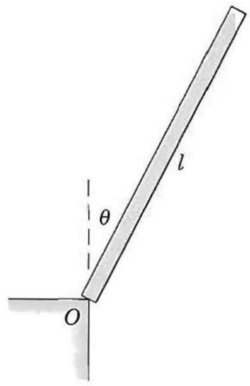
(b) Pino A, com (1) e (3):

$\vec{R}_A = -m\alpha\frac{l}{2}\vec{i} - \frac{ml}{6}\alpha\vec{j} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{R}_A = -\frac{ml}{6}\alpha(3\vec{i} - \vec{j})}$ **constante**, com α constante.

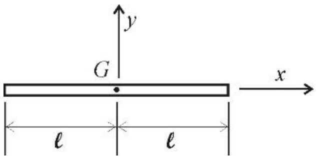
(c) sem contato implica $F = 0$; de (2) e (3):

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \frac{\sqrt{3\alpha}}{3}}$$

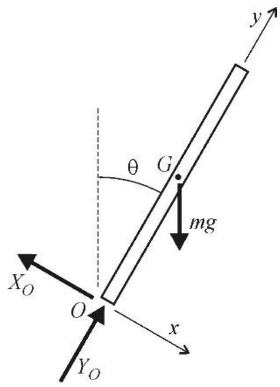
<u>Exemplo 5.17:</u> A barra delgada uniforme de massa m e comprimento $\boldsymbol{\ell}$ é liberada a partir do repouso na posição vertical e gira sobre sua extremidade plana em torno da quina em O. (a) Se a barra desliza quando θ = 30°, determine o coeficiente de atrito estático μ_e, entre a barra e a quina. (b) Se a extremidade da barra possui um entalhe de modo a não poder deslizar, determine o angulo θ no qual o contato entre a barra e a quina termina.



Dado: $J_{Gz} = \frac{ml^2}{3}$



Resolução:



Cinemática: $\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \frac{l}{2}\vec{j} = -\omega\frac{l}{2}\vec{i}$ (A)

e

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \frac{l}{2}\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \frac{l}{2}\vec{j}\right] = -\frac{\dot{\omega}l}{2}\vec{i} - \frac{\omega^2 l}{2}\vec{j}$ (B)

Trabalho (peso): $\tau = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$

Energia cinética, usando (A): $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 =$

$= \frac{1}{2}m\frac{\omega^2 l^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega^2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}$

TEC: $\frac{m\omega^2 l^2}{6} = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g(1-\cos\theta)}{l} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{3g\sin\theta}{2l}$

Substituindo em (B): $\vec{a}_G = -\left(-\frac{3g\sin\theta}{2l}\right)\frac{l}{2}\vec{i} - 3g\frac{(1-\cos\theta)}{l}\frac{l}{2}\vec{j} = \frac{3g\sin\theta}{4}\vec{i} - \frac{3g(1-\cos\theta)}{2}\vec{j}$ (C)

TR, com (C): $m\vec{a}_G = \frac{3mg\sin\theta}{4}\vec{i} - \frac{3mg(1-\cos\theta)}{2}\vec{j} = (-X_O + mg\sin\theta)\vec{i} + (Y_O - mg\cos\theta)\vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3mg\sin\theta}{4} = -X_O + mg\sin\theta \Rightarrow X_O = \frac{mg\sin\theta}{4} & (1) \\ -\frac{3mg(1-\cos\theta)}{2} = Y_O - mg\cos\theta \Rightarrow Y_O = \frac{mg(5\cos\theta-3)}{2} & (2) \end{cases}$$

(a) escorrega quando $\theta = 30°$:

No limite, de (1) e (2): $X_O = \mu Y_O \Rightarrow \frac{mg\sin\theta}{4} = \mu\frac{mg(5\cos\theta-3)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(5\sqrt{3}-6)}}$

(b) Não escorrega - a perda de contato ocorre quando $Y_O = 0$.

Da equação (2): $-\frac{3mg(1-\cos\theta)}{2} = -mg\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \mathbf{53{,}1°}$