Teorema fundamental do Cálculo

Existência de primitiva: Uma função F é primitiva de f se $F' = f$.

Anti-derivada — integral indefinida — $F(x) = \int f(x)\,dx$

Seja $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ limitada e integrável.

Vimos que $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ é contínua em $[a,b]$.

Agora vemos que F é derivável se f é contínua.

Exemplos:

1) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é primitiva de $f(x) = x$

pois $F'(x) = x = f(x)$.

2) $F(x) = \operatorname{sen} x$ é primitiva de $f(x) = \cos x$

pois $F'(x) = \cos x$.

Teo. Seja $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Assuma f contínua em $x_0\in(a,b)$. Então $F(x)=\int_a^x f(s)\,ds$ é derivável em $x=x_0$ e $F'(x_0)=f(x_0)$.

dem. $$q(x)=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(s)\,ds-\int_a^{x_0} f(s)\,ds\right)$$

$$=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(s)\,ds \qquad \text{spg. } x_0<x.$$

$\left|\int f\right|\leq\int|f|$

$$|q(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x\{f(s)-f(x_0)\}\,ds\right|$$

$$\leq\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|f(s)-f(x_0)|\,ds\leq\frac{1}{\cancel{x-x_0}}\sup_{s\in[x_0,x]}|f(s)-f(x_0)|\,\cancel{(x-x_0)}$$

$$\therefore \; |g(x) - f(x_0)| \leq \sup_{s \in [x_0, x]} |f(s) - f(x_0)|$$

Analogamente se obtem que $|g(x) - f(x_0)| \leq \sup_{s \in [x, x_0]} |f(s) - f(x_0)|$.

Como f é contínua em x_0 temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - x_0| < \delta.$$

Daí, se $|x - x_0| < \delta \rightsquigarrow |g(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

$$\rightsquigarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0).$$

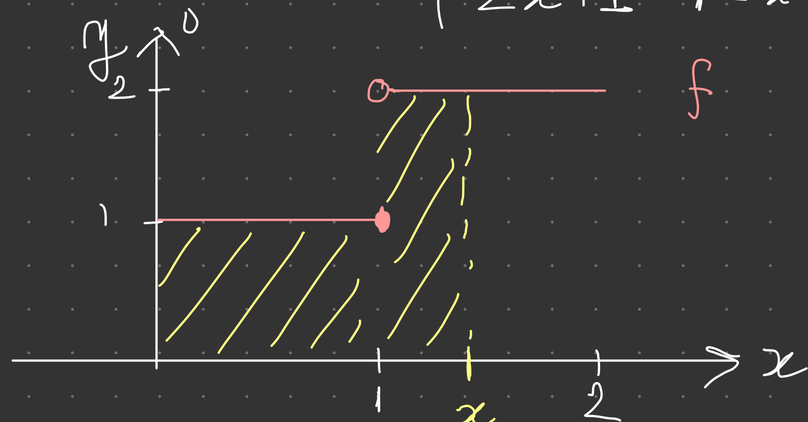
$\blacksquare$

Corolário: Se $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ é contínua, então $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Além disso $F_+'(a) = f(a)$ e $F_-'(b) = f(b)$.

Exemplos

1) $f:[0,2]\mapsto\mathbb{R}$ com $f(x) = \begin{cases} 1 & 0\leq x\leq 1 \\ 2 & 1< x\leq 2 \end{cases}$.

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds = \begin{cases} x & 0\leq x\leq 1 \\ 2x+1 & 1< x\leq 2 \end{cases}$$



Note de não existe $F'(1)$.

<u>OBS</u>: A continuidade é condição suficiente mas não necessária. ie. existem funções contínuas tais que $F(x)$ é primitiva.

2) $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

F é derivável em $x=0$ pois

$$q(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x - 0}{x - 0} = x \operatorname{sen} 1/x \xrightarrow[\text{qdo } x \to 0]{} 0.$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Note que F' não é contínua em $x=0$ pois $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$.

Corolário: Sejam F e G primitivas de f em (a,b).

Então $F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (a,b)$ e algum $c \in \mathbb{R}$.

dem.
$$\big(F(x) - G(x)\big)' = f(x) - f(x) = 0 \text{ em } (a,b).$$

$$\rightsquigarrow \quad F(x) - G(x) = \text{constante em } (a,b). \qquad \blacksquare$$

$[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ltda e integrável

Teorema Fundamental do Cálculo. Seja $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ contínua e $G(x)$ uma primitiva qualquer de f. Então para qq. $c \in (a,b)$ temos

$$\int_c^x f(s)\,ds = G(x) - G(c) := G(s)\Big|_c^x \qquad x \in (a,b)$$

OBS: A prova do caso mais geral pode ser visto em Análise 1, Djairo Figueire.

<u>dem.</u> f contínua $\rightsquigarrow$ $F(x) = \int_c^x f(s)\,ds$ é primitiva de f.

Como G também é primitiva, $\exists$ d constante tal que

$$F(x) = G(x) + d \quad \forall x \in (a,b)$$

Note $F(c) = \int_c^c f(s)\,ds = 0 \rightsquigarrow G(c) = -d.$

$$\therefore \underset{\displaystyle\int_c^x f(s)\,ds}{\underset{\uparrow}{F(x)}} = G(x) - G(c) \text{ em } (a,b). \quad \blacksquare$$

Exemplos:

1) $$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$ n inteiro positivo

$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ é primitiva de x^n

2) $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0.$$

$G(x) = \operatorname{sen} x$ é primitiva