Polinômios de Chebyshev

Uma Introdução via Análise de Fourier

Nelson Kuhl

IME/USP

18 de novembro de 2021
Atualização - 30 de novembro de 2021

Introdução

- Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vimos que é possível fazer a análise harmônica dela considerando-se a sua extensão periódica de período $b - a$ à reta toda.

Introdução

- Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vimos que é possível fazer a análise harmônica dela considerando-se a sua extensão periódica de período $b - a$ à reta toda.
- Porém, mesmo que $f \in C^\infty([a, b])$, a sua extensão periódica pode ser descontínua, implicando em um decaimento lento dos coeficientes de Fourier.

Introdução

- Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vimos que é possível fazer a análise harmônica dela considerando-se a sua extensão periódica de período $b - a$ à reta toda.
- Porém, mesmo que $f \in C^\infty([a, b])$, a sua extensão periódica pode ser descontínua, implicando em um decaimento lento dos coeficientes de Fourier.
- Para aproximarmos uma função suave em $[a, b]$ usando-se análise de Fourier, há uma técnica envolvendo mudança de variável, com resultados muito interessantes.

Introdução

- Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vimos que é possível fazer a análise harmônica dela considerando-se a sua extensão periódica de período $b - a$ à reta toda.
- Porém, mesmo que $f \in C^\infty([a, b])$, a sua extensão periódica pode ser descontínua, implicando em um decaimento lento dos coeficientes de Fourier.
- Para aproximarmos uma função suave em $[a, b]$ usando-se análise de Fourier, há uma técnica envolvendo mudança de variável, com resultados muito interessantes.
- Faremos inicialmente a análise no intervalo $[-1, 1]$. Posteriormente, uma nova mudança de variável nos permitirá tratar de intervalos arbitrários.

Um resultado importante

Proposição 1

Seja $f \in C^{\infty}([-1,1])$. Então a função **periódica** F de período 2π **definida em** $[-\pi,\pi]$ por

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\cos\theta), & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ F(-\theta), & \text{se } -\pi \leq \theta \leq 0, \end{cases}$$

é **par** e **pertence a** $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Um resultado importante

Proposição 1

Seja $f \in C^\infty([-1,1])$. Então a função **periódica** F de período 2π **definida em** $[-\pi,\pi]$ por

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\cos\theta), & \text{se } 0 \le \theta \le \pi, \\ F(-\theta), & \text{se } -\pi \le \theta \le 0, \end{cases}$$

é **par** e **pertence a** $C^\infty(\mathbb{R})$.

A demontração fica como exercício. Observe que se $\theta \in [0,\pi]$, então $\cos\theta \in [-1,1]$ e portanto F está bem definida. Para verificar a regularidade de F, basta estudar o seu comportamento em $\theta = 0, -\pi$ e π.

Aproximação de F

Como F é par e suave, a sua série de Fourier não tem os termos em seno e converge para ela:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta. \tag{1}$$

Aproximação de F

Como F é par e suave, a sua série de Fourier não tem os termos em seno e converge para ela:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta. \tag{1}$$

Os coeficientes são iguais a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\cos k\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\, dtheta, \;\; k \geq 0, \tag{2}$$

onde usamos a paridade e o fato de que $F(\theta) = f(\cos\theta)$ em $[0, \pi]$. Estes coeficientes decaem mais rápido do que qualquer potência de k quando $k \to \infty$, pois F é 2π-periódica e pertence a $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Um resultado trigonométrico

Proposição 2

Para todo inteiro $k \geq 0$, a função $\cos k\theta$ é um **polinômio de grau** k em $\cos\theta$.

Um resultado trigonométrico

Proposição 2

Para todo inteiro $k \geq 0$, a função $\cos k\theta$ é um **polinômio de grau** k em $\cos\theta$.

Demonstração

Para $k = 0$ e $k = 1$, $\cos k\theta$ é igual a 1 e $\cos\theta$, respectivamente, que são polinômios de graus 0 e 1 em $\cos\theta$, respectivamente. O resultado segue por indução finita usando-se a relação de recorrência

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta, \;\; k \geq 1. \tag{3}$$

Um resultado trigonométrico

Proposição 2

Para todo inteiro $k \geq 0$, a função $\cos k\theta$ é um **polinômio de grau** k em $\cos\theta$.

Demonstração

Para $k = 0$ e $k = 1$, $\cos k\theta$ é igual a 1 e $\cos\theta$, respectivamente, que são polinômios de graus 0 e 1 em $\cos\theta$, respectivamente. O resultado segue por indução finita usando-se a relação de recorrência

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta,\ \ k \geq 1. \tag{3}$$

Estes polinômios de grau k serão denotados por T_k:

$$T_k(\cos\theta) = \cos k\theta,\ \ k \geq 0. \tag{4}$$

Polinômios de Chebyshev

Do resultado anterior, usando-se a bijeção arccos(x) entre $[-1, 1]$ e $[0, \pi]$, podemos definir os seguintes polinômios a partir de (4).

Polinômios de Chebyshev

Do resultado anterior, usando-se a bijeção $\arccos(x)$ entre $[-1, 1]$ e $[0, \pi]$, podemos definir os seguintes polinômios a partir de (4).

Definição 1

Os **polinômios de Chebyshev** T_k, $k \geq 0$, são os polinômios de grau k definidos no intervalo $[-1, 1]$ pela relação

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x)), \ x \in [-1, 1]. \tag{5}$$

Polinômios de Chebyshev

Do resultado anterior, usando-se a bijeção $\arccos(x)$ entre $[-1,1]$ e $[0,\pi]$, podemos definir os seguintes polinômios a partir de (4).

Definição 1

Os **polinômios de Chebyshev** T_k, $k \geq 0$, são os polinômios de grau k definidos no intervalo $[-1,1]$ pela relação

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x)), \;\; x \in [-1,1]. \tag{5}$$

Se $f \in C^\infty([-1,1])$, podemos concluir da Proposição 1 e das expressões (1) e (2), que

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x), \;\; x \in [-1,1], \tag{6}$$

onde

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos k\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{7}$$

Polinômios de Chebyshev

- A última integral em (7) é obtida a partir da mudança de variável $\theta = \arccos(x)$ na primeira integral.

Polinômios de Chebyshev

- A última integral em (7) é obtida a partir da mudança de variável $\theta = \arccos(x)$ na primeira integral.
- Observe o termo $\sqrt{1 - x^2}$ no denominador. Há singularidades em $x = -1$ e $x = 1$, mas elas são integráveis. Este mesmo termo aparecerá na definição de um produto interno a seguir.

Polinômios de Chebyshev

- A última integral em (7) é obtida a partir da mudança de variável $\theta = \text{arccos}(x)$ na primeira integral.
- Observe o termo $\sqrt{1 - x^2}$ no denominador. Há singularidades em $x = -1$ e $x = 1$, mas elas são integráveis. Este mesmo termo aparecerá na definição de um produto interno a seguir.
- Note que (6) é uma expansão de f em uma série de Polinômios de Chebyshev, cujos coeficientes decaem rapidamente.

Polinômios de Chebyshev

- A última integral em (7) é obtida a partir da mudança de variável $\theta = \arccos(x)$ na primeira integral.
- Observe o termo $\sqrt{1 - x^2}$ no denominador. Há singularidades em $x = -1$ e $x = 1$, mas elas são integráveis. Este mesmo termo aparecerá na definição de um produto interno a seguir.
- Note que (6) é uma expansão de f em uma série de Polinômios de Chebyshev, cujos coeficientes decaem rapidamente.
- O cálculo destes coeficientes é complicado, mas há métodos numéricos eficientes para realizá-lo.

Polinômios de Chebyshev - Propriedades

Propriedade 1

Relação de recorrência: $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$ e

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1. \tag{8}$$

Consequência imediata da definição (4) e da relação de recorrência (3).

Polinômios de Chebyshev - Propriedades

Propriedade 1

Relação de recorrência: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ e

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1. \tag{8}$$

Consequência imediata da definição (4) e da relação de recorrência (3).
Usando (8), podemos obter expressões para os polinômios de Chebyshev:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Polinômios de Chebyshev - Propriedades

Propriedade 2

Paridade: $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$

Segue por indução finita aplicada à relação de recorrência (8).

Propriedade 3

$$|T_k(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$T_k(1) = 1, \quad T_k(-1) = (-1)^k$$

Consequência da definição $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$.

Polinômios de Chebyshev - Propriedades

Propriedade 4

Raízes: Para $k \geq 1$, T_k tem k raízes distintas contidas em $(-1, 1)$

$$x_j^{(rk)} = \cos\left(\frac{2j-1}{k}\frac{\pi}{2}\right), \quad 1 \leq j \leq k \tag{9}$$

Logo, *todas* as raízes de T_k, $k \geq 1$, são reais, simples e estão contidas no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Polinômios de Chebyshev - Propriedades

Propriedade 4

Raízes: Para $k \geq 1$, T_k tem k raízes distintas contidas em $(-1, 1)$

$$x_j^{(rk)} = \cos\left(\frac{2j-1}{k}\frac{\pi}{2}\right), \quad 1 \leq j \leq k \tag{9}$$

Logo, *todas* as raízes de T_k, $k \geq 1$, são reais, simples e estão contidas no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Propriedade 5

Pontos de extremo: Para $k \geq 1$, os pontos nos quais T_k assume seus valores extremos em $[-1, 1]$ são os $k+1$ pontos onde $|T_k|$ é igual a 1

$$x_j^{(ek)} = \cos\left(j\frac{\pi}{k}\right), \quad 0 \leq j \leq k \tag{10}$$

Logo, *todos* os pontos de máximo e mínimo locais em $\mathbb{R}$ de T_k, $k \geq 2$, são os pontos $x_j^{(ek)}$, $1 \leq j \leq k-1$, entrelaçados com as raízes.

Relações de ortogonalidade

Sabemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta \, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } k = l = 0 \\ \pi & \text{se } k = l \geq 1 \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$$

Relações de ortogonalidade

Sabemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta \, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } k = l = 0 \\ \pi & \text{se } k = l \geq 1 \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$$

Por outro lado, usando paridade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta \, d\theta &= 2\int_{0}^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta \, d\theta = 2\int_{0}^{\pi} T_k(\cos\theta) T_l(\cos\theta) \, d\theta \\ &= 2\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x) T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \end{aligned}$$

onde a última integral foi obtida da definição dos polinômios de Chebyshev e da mudança de variável $x = \arccos\theta$.

Relações de ortogonalidade

Logo, se definirmos o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \tag{11}$$

no espaço dos polinômios, temos que os polinômios de Chebyshev formam uma família de polinômios ortogonais em relação a (11) e satisfazem

Relações de ortogonalidade

Logo, se definirmos o produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{11}$$

no espaço dos polinômios, temos que os polinômios de Chebyshev formam uma família de polinômios ortogonais em relação a (11) e satisfazem

$$\langle T_k, T_l\rangle = \begin{cases} \pi & \text{se } k = l = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } k = l \geq 1 \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases} \tag{12}$$

Um problema de mínimos quadrados

A discussão acima nos permite formular o seguinte problema.

Dada uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua, aproxime-a por um polinômio g_m de grau menor ou igual a m de forma a minimizar

$$\int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - g_m(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \tag{13}$$

Note que (13) é igual a $\langle f - g_m, f - g_m \rangle$ onde o produto interno é o definido por (11) e portanto temos um problema de mínimos quadrados.

Um problema de mínimos quadrados

A discussão acima nos permite formular o seguinte problema.

Dada uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua, aproxime-a por um polinômio g_m de grau menor ou igual a m de forma a minimizar

$$\int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - g_m(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \tag{13}$$

Note que (13) é igual a $\langle f - g_m, f - g_m \rangle$ onde o produto interno é o definido por (11) e portanto temos um problema de mínimos quadrados. A solução pode ser buscada na forma

$$g_m(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=0}^{m} c_k T_k(x) \tag{14}$$

e das relações de ortogonalidade (12) obtemos

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta \, d\theta, \quad k \geq 0 \tag{15}$$

Observações

- As raízes (9) e os pontos de extremo (10) tem aplicações importantes em fórmulas de integração numérica e em aproximação de funções.

Observações

- As raízes (9) e os pontos de extremo (10) tem aplicações importantes em fórmulas de integração numérica e em aproximação de funções.
- Os cálculos dos coeficientes (15) e da expansão (14) são mais elaborados.

Observações

- As raízes (9) e os pontos de extremo (10) tem aplicações importantes em fórmulas de integração numérica e em aproximação de funções.
- Os cálculos dos coeficientes (15) e da expansão (14) são mais elaborados.
- Porém, há métodos numéricos bem eficientes para estes cálculos.

Intervalo $[a, b]$

Se $F(t)$ estiver definida para $t \in [a, b]$, podemos usar os resultados descritos acima da seguinte forma:

- Defina
$$f(x) = F\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right), \quad x \in [-1, 1].$$
Note que quando x percorre o intervalo $[-1, 1]$, o argumento de F percorre o intervalo $[a, b]$.

Intervalo $[a, b]$

Se $F(t)$ estiver definida para $t \in [a, b]$, podemos usar os resultados descritos acima da seguinte forma:

- Defina
$$f(x) = F\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right), \quad x \in [-1, 1].$$
Note que quando x percorre o intervalo $[-1, 1]$, o argumento de F percorre o intervalo $[a, b]$.
- Aproxime f no intervalo $[-1, 1]$ pelo método dos mínimos quadrados usando a expansão (14) e os coeficientes (15). Denote a aproximação por $g_m(x)$.

Intervalo $[a, b]$

Se $F(t)$ estiver definida para $t \in [a, b]$, podemos usar os resultados descritos acima da seguinte forma:

- Defina
$$f(x) = F\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right), \quad x \in [-1, 1].$$
Note que quando x percorre o intervalo $[-1, 1]$, o argumento de F percorre o intervalo $[a, b]$.
- Aproxime f no intervalo $[-1, 1]$ pelo método dos mínimos quadrados usando a expansão (14) e os coeficientes (15). Denote a aproximação por $g_m(x)$.
- A aproximação $G_m(t)$ para $t \in [a, b]$ será dada por
$$G_m(t) = g_m\left(\frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}\right), \quad t \in [a, b].$$
Note que quando t percorre $[a, b]$, o argumento de g_m percorre $[-1, 1]$.