

# Radiação eletromagnética

- ⚡ Equações de Jefimenko
- ⚡ Potenciais de Liénard-Wiechert
- ⚡ Radiação de dipolo elétrico

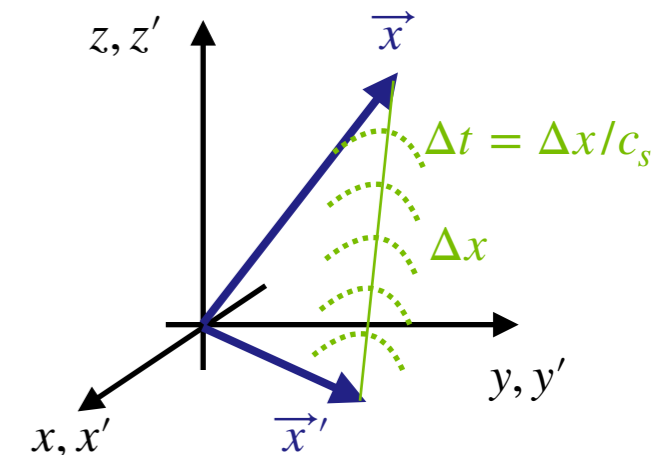
# Solução exata das Eqs. de Maxwell

- Na aula passada encontramos a solução exata, formal, definitiva, das equações de Maxwell, em termos da função de Green retardada para a equação de onda:

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \frac{1}{4\pi \Delta x} \delta(t' - t + \Delta x/c_s)$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(t', \vec{x}')}{\epsilon} G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3x' \frac{\rho(t_{Ret}, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \text{onde } t' \rightarrow t_{Ret} = t - \Delta x/c_s$$



- A interpretação é clara: se movimentamos uma densidade de carga em um ponto  $\vec{x}'$ , o potencial na posição  $\vec{x}$  só vai responder a esse movimento após um tempo  $\Delta x/c_s$ .
- Em outras palavras: a informação da fonte se propaga com uma velocidade  $c_s$ , que no vácuo é  $c = \sqrt{1/\mu_0\epsilon_0} = 299,792,458 \text{ m/s}$ .
- O potencial-vetor  $\vec{A}$  tem uma solução idêntica:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(t_{Ret}, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

# Potenciais e campos retardados

- Nós também podemos calcular os campos elétrico e magnético que correspondem a essas soluções — os chamados **campos de Jefimenko**.
- Usando as Leis de Gauss e de Ampère temos:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{\Delta x} \left[ -\vec{\nabla}' \rho(t', \vec{x}') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}}, \text{ e:}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{\Delta x} \left[ \vec{\nabla}' \times \vec{J} \right]_{t'=t_{Ret}}$$

- É importante notar que não podemos simplesmente calcular  $\vec{\nabla}' f(t' = t_{Ret})$ , já que  $\vec{\nabla}' f(t' = t_{Ret}) \neq [\vec{\nabla}' f]_{t'=t_{Ret}}$ . De fato:

$$\vec{\nabla}' [f]_{t'=t_{Ret}} = [\vec{\nabla}' f]_{t'=t_{Ret}} + \left[ \frac{\partial f}{\partial t'} \vec{\nabla}'(t' = t_{Ret}) \right]_{t'=t_{Ret}} = [\vec{\nabla}' f]_{t'=t_{Ret}} + \left[ \frac{\partial f}{\partial t'} \vec{\nabla}' \frac{1}{c} \Delta x \right]_{t'=t_{Ret}} = [\vec{\nabla}' f]_{t'=t_{Ret}} + \frac{\Delta \hat{x}}{c} \left[ \frac{\partial f}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}},$$

onde  $\Delta \hat{x} = (\vec{x} - \vec{x}') / |\vec{x} - \vec{x}'|$ .

- Portanto, esse gradiente tem a forma:

$$[\vec{\nabla}' \rho]_{t'=t_{Ret}} = \vec{\nabla}' [\rho(t' = t_{Ret})] - \frac{\Delta \hat{x}}{c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}}, \text{ e}$$

$$[\vec{\nabla}' \times \vec{J}]_{t'=t_{Ret}} = \vec{\nabla}' \times [\vec{J}(t' = t_{Ret})] - \frac{\Delta \hat{x}}{c} \times \left[ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}}$$

Podemos então substituir essas expressões nas equações para  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  no topo desta página.

# Potenciais e campos retardados

- O resultado dessas substituições para o campo elétrico resultam em:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{\Delta x} \left[ -\vec{\nabla}'[\rho(t' = t_{Ret})] + \frac{\Delta\hat{x}}{c} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{J}}{\partial t'} \Big|_{t'=t_{Ret}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left[ -\vec{\nabla}' \left[ \frac{1}{\Delta x} \rho(t' = t_{Ret}) \right] + \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta x} \right] \rho(t' = t_{Ret}) + \frac{\Delta\hat{x}}{c \Delta x} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial\vec{J}}{\partial t'} \Big|_{t'=t_{Ret}} \right] \\ &= 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left[ \frac{\Delta\hat{x}}{\Delta x^2} \rho(t' = t_{Ret}) + \frac{\Delta\hat{x}}{c \Delta x} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial\vec{J}}{\partial t'} \Big|_{t'=t_{Ret}} \right]\end{aligned}$$

onde o termo de superfície.

- De modo similar, o campo magnético resulta na expressão:

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[ \vec{J}(t' = t_{Ret}) \times \frac{\Delta\hat{x}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta\hat{x}}{c \Delta x} \times \left[ \frac{\partial\vec{J}}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} \right]$$

# Potenciais e campos retardados

- Aqui estão esses dois resultados novamente:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left[ \frac{\Delta\hat{x}}{\Delta x^2} \rho(t' = t_{Ret}) + \frac{\Delta\hat{x}}{c \Delta x} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \Big|_{t'=t_{Ret}} \right]$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[ \vec{J}(t' = t_{Ret}) \times \frac{\Delta\hat{x}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta\hat{x}}{c \Delta x} \times \left[ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{t'=t_{Ret}} \right]$$

- Agora podemos ver claramente a estrutura desses campos: por um lado, temos as **partes estáticas das soluções**,

$$\vec{E}_{Stat} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(t' = t_{Ret}) \left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$$

$$\vec{B}_{Stat} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{J}(t' = t_{Ret}) \times \left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$$

que são simplesmente **generalizações** das soluções estáticas obtidas por meio da Lei de Gauss (para o campo elétrico), da Lei de Ampère (para o campo magnético)!

# Cargas pontuais: os campos de Feynman-Heaviside

- É interessante escrever os resultados obtidos há pouco no caso de cargas pontuais:

$$\rho(t', \vec{x}') = q\delta[\vec{x}' - \vec{x}_q(t')] \quad , \quad e$$

$$\vec{J}(t', \vec{x}') = q\vec{v}_q(t')\delta[\vec{x}' - \vec{x}_q(t')] \quad , \quad \text{com } \vec{v}_q(t') = \dot{\vec{x}}_q(t')$$

- Antes de seguirmos em frente é importante notar que a função delta de Dirac acima carrega uma **dependência implícita na posição  $\vec{x}'$  por meio do tempo retardado**, pois a posição (e a velocidade) da carga pontual é calculada em  $\vec{x}_q(t' = t - \Delta x/c)$ .
- Isso significa que qualquer integral sobre  $d^3x'$  dessa distribuição deve levar em conta a posição  $\vec{x}'$  onde a carga **estava** no tempo retardado — veja a figura.
- Em outras palavras, o **zero** do argumento da função delta é a solução de:

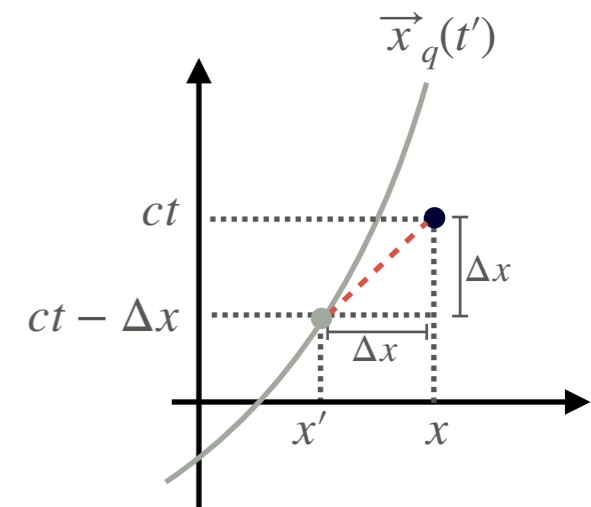
$$\vec{x}' - \vec{x}_q(t - |\vec{x}' - \vec{x}|/c) = 0 \quad .$$

- Vamos expressar o argumento da função delta de Dirac usando  $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}'$ , ou seja:

$$\vec{x}' - \vec{x}_q(t - |\vec{x}' - \vec{x}|/c) = \vec{x} - \Delta\vec{x} - \vec{x}_q(t - \Delta x/c) = 0 \quad .$$

- Mudando de variáveis na função delta de  $\vec{x}'$  para  $\Delta\vec{x}$  nos leva a:

$$\begin{aligned} \delta[\vec{x}' - \vec{x}_q(t - |\vec{x}' - \vec{x}|/c)] &= \delta[\vec{x} - \Delta\vec{x} - \vec{x}_q(t - \Delta x/c)] \times \frac{1}{\left| \vec{\nabla}_{\Delta x}[\vec{x} - \Delta\vec{x} - \vec{x}_q(t - \Delta x/c)] \right|} \\ &= \delta[\vec{x} - \Delta\vec{x} - \vec{x}_q(t - \Delta x/c)] \times \frac{1}{1 - \vec{v}_q(t_{Ret}) \cdot \Delta\hat{x}/c} \end{aligned}$$



Um outro modo de ver como esse fator aparece é notar que  $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}_q(t')|/c$ , portanto:

$$\frac{dt}{dt'} = \kappa = 1 - \Delta\hat{x} \cdot \vec{v}_q/c$$

# Cargas pontuais: os campos de Feynman-Heaviside

- A moral da história é que uma integral de uma função delta de Dirac incluindo o tempo retardado introduz um fator extra de:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{1 - \vec{v}_q(t_{Ret}) \cdot \Delta \hat{x} / c}$$

- Mas a complicação adicional devida ao "retardo" é basicamente essa. Podemos então escrever os campos elétrico e magnético como:

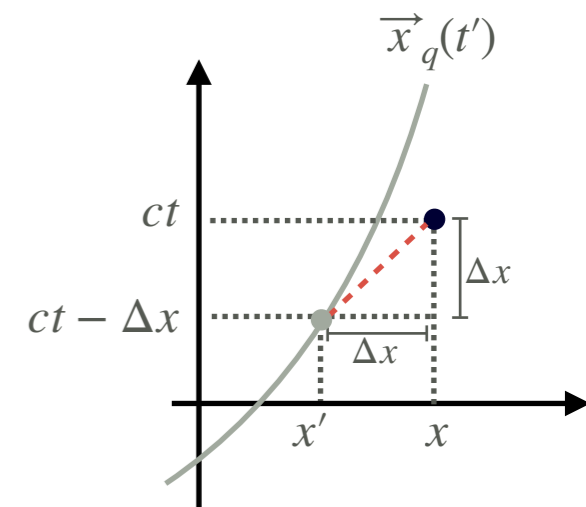
$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{\Delta \hat{x}}{\kappa \Delta x^2} \right]_{Ret} + \frac{\partial}{c \partial t} \left[ \frac{\Delta \hat{x}}{\kappa \Delta x} \right]_{Ret} - \frac{\partial}{c^2 \partial t} \left[ \frac{\vec{v}_q}{\kappa \Delta x} \right]_{Ret} \right\}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\vec{v}_q \times \Delta \hat{x}}{\kappa \Delta x^2} \right]_{Ret} + \frac{\partial}{c \partial t} \left[ \frac{\vec{v}_q \times \Delta \hat{x}}{\kappa \Delta x} \right]_{Ret} \right\}$$

- Uma manipulação cuidadosa das derivadas nas expressões acima leva aos campos na forma:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{\Delta \hat{x}}{\Delta x^2} \right]_{Ret} + \Delta x_{Ret} \frac{\partial}{c \partial t} \left[ \frac{\Delta \hat{x}}{\Delta x^2} \right]_{Ret} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} [\Delta \hat{x}]_{Ret} \right\}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\vec{v}_q \times \Delta \hat{x}}{\kappa^2 \Delta x^2} \right]_{Ret} + \frac{1}{\Delta x_{Ret}} \frac{\partial}{c \partial t} \left[ \frac{\vec{v}_q \times \Delta \hat{x}}{\kappa} \right]_{Ret} \right\}$$



- A beleza dessas expressões é o fato de que podemos enxergar claramente a **parte radiativa do campo elétrico**, que **não decai** como  $1/\Delta x^2$ , e cuja **fonte** é a **aceleração**,  $\partial^2/\partial t^2(\dots)$ . [Há um termo análogo para o campo magnético, mas esta parte é menos evidente.]

# Cargas pontuais: os potenciais de Liénard-Wiechert

- Os mesmos cálculos que fizemos agora há pouco para os campos podem também serem feitos para os **potenciais**, e o resultado é:

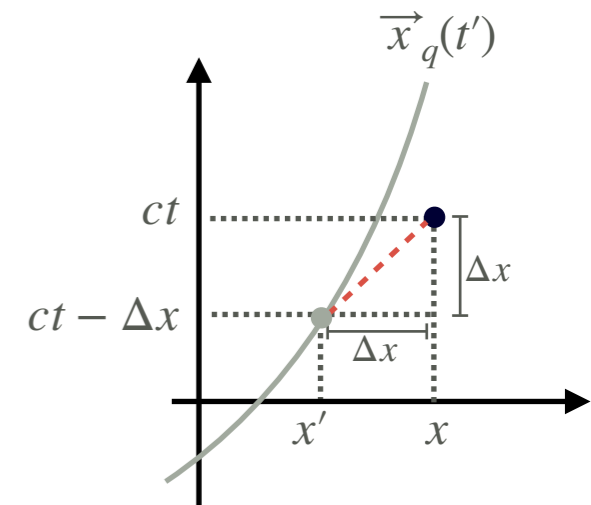
$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\kappa} \right]_{Ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\Delta x - \vec{\beta}_q \cdot \Delta \vec{x}} \right]_{Ret} ,$$

onde  $\vec{\beta}_q = \vec{v}_q/c$  , e

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{v}_q}{\Delta x - \vec{\beta}_q \cdot \Delta \vec{x}} \right]_{Ret}$$

- Esses são os **potenciais de Liénard-Wiechert**, a partir dos quais é trivial obter o limite não-relativístico.
- Note que as estruturas do potencial elétrico e do potencial-vetor são idênticas. De fato, podemos escrever o potencial de Liénard-Wiechert numa forma **manifestamente covariante** como :

$$A^\mu(x) = \frac{q\mu_0 c}{4\pi} \left[ \frac{U_q^\mu}{U_{q,\alpha} \Delta x^\alpha} \right]_{Ret} , \text{ onde } A^0 \rightarrow \phi. \text{ Para mais detalhes, ver Jackson, Cap. 14.1}$$









# Radiação eletromagnética: exemplos

- A aproximação introduzida acima significa que agora podemos escrever cada componente de Fourier dos campos,

$$\vec{A} = \sum_{\omega} \vec{A}_{\omega} e^{-i\omega t} \quad \text{na zona de radiação como:}$$

$$\vec{A}_{\omega} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} e^{ikr} \int d^3x' \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}}{r - \hat{x}\cdot\vec{x}'} \vec{J}_{\omega}(\vec{x}') \quad , \quad \text{onde } \vec{k} \equiv k\hat{x} \quad \text{[Atenção com essa definição importantíssima!]}$$

- Note que o fator na exponencial  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$  pode variar muito rápido, enquanto o termo pequeno no denominador é subdominante. Portanto, na zona de radiação podemos aproximar a integral acima por:

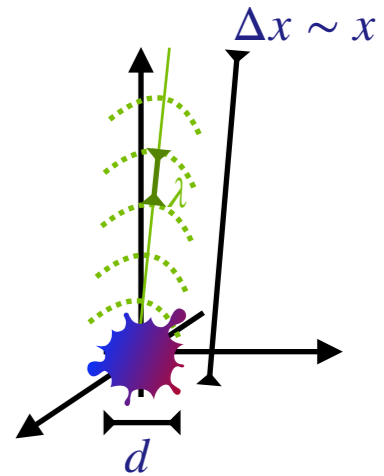
$$\vec{A}_{\omega} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \vec{J}_{\omega}(\vec{x}') \quad , \quad \text{e uma expressão idêntica para o potencial elétrico:}$$

$$\phi_{\omega} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \rho_{\omega}(\vec{x}')$$

- De fato, esse tipo de solução aparece novamente quando estudamos a teoria do espalhamento e da difração da luz!
- Mas por enquanto, ficamos com um resultado muito importante, que nos diz que os modos de Fourier dos campos podem ser escritos, na zona de radiação, como:

$$\vec{A}_{\omega} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{\vec{J}}_{\omega}(\vec{k} = k\hat{x}) \quad , \quad \text{and}$$

$$\phi_{\omega} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{\rho}_{\omega}(\vec{k} = k\hat{x})$$



# Radiação eletromagnética: exemplos

- Agora podemos ir adiante e simplificar ainda mais essa expressão. Vamos supor que a fase na integral de Fourier é sempre pequena, ou seja, que:

$$\vec{k} \cdot \vec{x}' = \frac{\omega}{c} x' \hat{x} \cdot \hat{x}' \rightarrow \frac{\omega d}{c} \cos \theta \ll 1$$

isto é, que as **dimensões típicas das fontes** são **menores que o comprimento de onda** da radiação,  $\lambda = 2\pi c/\omega$ .

Isso vai ocorrer se nós movemos a fonte (cargas) lentamente: por exemplo, para uma frequência de  $\nu \sim 10^3 \text{ s}^{-1} = 10^3 \text{ Hz}$  nós obtemos um comprimento de onda de  $\lambda = c/\nu$  que é da ordem de milhares de km! Mesmo para luz nas frequências de GHz os comprimentos de onda são da ordem de cm — o que é muitíssimo maior que a escala de átomos e moléculas que produzem esse tipo de luz!

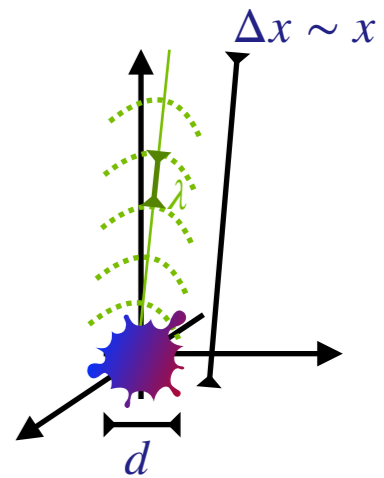
Em outras palavras: essa é uma **ótima aproximação**, quase sempre!

- Se esse for de fato o caso num problema físico, temos que a radiação EM é bem descrita por:

$$\vec{A}_\omega \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \left( 1 - i \vec{k} \cdot \vec{x}' + \dots \right) \vec{J}_\omega(\vec{x}') \quad , \quad e$$

$$\phi_\omega \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \left( 1 - i \vec{k} \cdot \vec{x}' + \dots \right) \rho_\omega(\vec{x}')$$

- Vamos olhar com cuidado para cada um desses termos, e ver o que eles significam.



# Radiação eletromagnética: exemplos

- O primeiro termo do potencial elétrico corresponde à integral simples:

$$\phi_\omega \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \rho_\omega(\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} Q_\omega$$

Porém, isso é simplesmente a **carga total**, que para qualquer fonte isolada deve ser **constante**,  $\omega = k = 0$ !

Essa solução portanto é do tipo electrostático — ou seja, ela é simplesmente o potencial  $\sim Q/r$  de uma carga “pontual”, vista de “muito longe” (ou seja, da zona de radiação)

- Vamos agora passar ao próximo termo, que é o primeiro termo do potencial-vetor:

$$\vec{A}_\omega \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \vec{J}_\omega(\vec{x}')$$

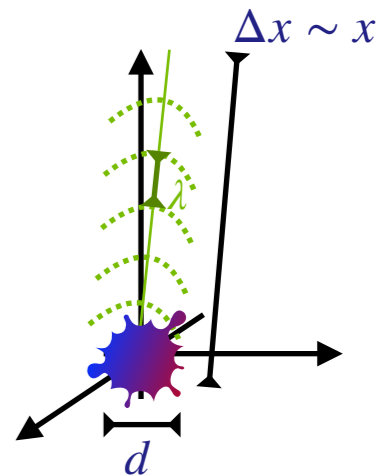
Podemos reescrever essa integral por meio de integração por partes, como:

$$A_{\omega,j} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' J_{\omega,j}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \left[ \partial'_i (x'_j J_{\omega,i}) - x'_j (\partial'_i J_{\omega,i}) \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \int d^2S^i (x'_j J_{\omega,i}) - \int d^3x' x'_j (i\omega \rho_\omega) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (-i\omega) \int d^3x' \vec{x}' \rho_\omega(\vec{x}') = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} i\omega \vec{p}_\omega$$

- Portanto, esse termo corresponde a um **dipolo elétrico**  $\vec{p}_\omega$ , que **oscila** com um período  $T = 2\pi/\omega$ !



# Radiação de dipolo

- O próximo termo, que é também o **primeiro termo não-trivial do potencial elétrico**, é de fato a contrapartida em  $\phi$  do mesmíssimo dipolo elétrico oscilante que acabamos de encontrar para o potencial-vetor:

$$\phi_\omega \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' (-i\vec{k} \cdot \vec{x}') \rho_\omega(\vec{x}') = \frac{c^2\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( -i\frac{\omega}{c}\hat{x} \right) \cdot \vec{p}_\omega$$

$$\Rightarrow \phi_\omega = c\hat{x} \cdot \vec{A}_\omega$$

- Esses primeiros termos não-triviais de  $\phi$  e  $\vec{A}$  são chamados de potenciais da **radiação de dipolo oscilante**:

$$\vec{A}_\omega^{E-dip} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} i\omega \vec{p}_\omega, \text{ e}$$

$$\phi_\omega^{E-dip} = c\hat{x} \cdot \vec{A}_\omega$$

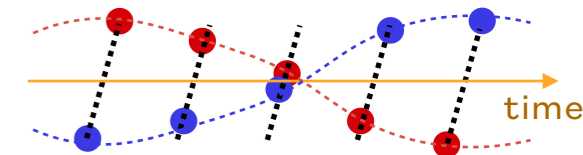
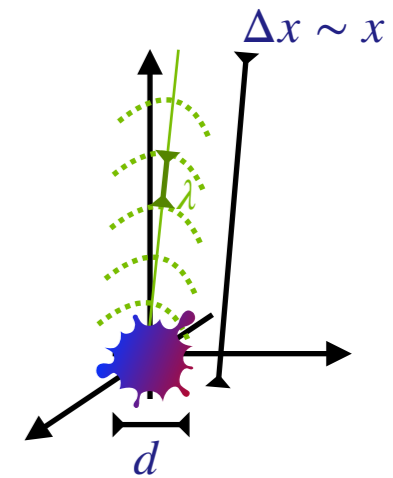
Eles correspondem à situação mais simples possível: um par de cargas opostas que se move para cima e para baixo, oscilando em torno de um centro.

- O próximo termo na expansão do potencial-vetor corresponde à **radiação de dipolo magnético**:

$$\vec{A}_\omega \simeq \vec{A}_\omega^{E-dip} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' (-i\vec{k} \cdot \vec{x}') \vec{J}_\omega(\vec{x}')$$

$$\Rightarrow A_{\omega,i}^{M-dip} = -i\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} k_j \int d^3x' x'_j J_{\omega,i}$$

A radiação de dipolo magnético pode ser pensada como um loop com uma corrente que oscila no sentido horário/anti-horário, como mostrado na figura.



# Radiação de dipolo

- Vamos agora calcular os campos elétrico e magnético gerados por esses potenciais radiativos. Nossa notação será a seguinte:

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega \quad , \quad e$$

$$\vec{E}_\omega = \frac{i}{\omega} \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}_\omega = \frac{i}{\omega} Z_0 \vec{\nabla} \times \vec{H}_\omega$$

onde  $Z_0$  é a chamada *impedância do vácuo*.

- Obviamente, o termo de "monopolo" do potencial elétrico não faz parte da descrição acima, já que ele dá simplesmente o campo eletrostático,  $\vec{E} = Q/(4\pi\epsilon_0) \vec{r}/r^3$ .
- Os campos de radiação de dipolo elétrico resultam de um cálculo muito simples (verifiquem!) a partir das formulas acima:

$$\vec{H}_\omega^{E-dip} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega^{E-dip} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} i\omega \vec{p}_\omega \right] \quad , \quad \text{dos quais obtemos:}$$

$$\vec{H}_\omega^{E-dip} = \frac{k^2 c}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \hat{x} \times \vec{p}_\omega \quad , \quad e$$

$$\vec{E}_\omega^{E-dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left[ (3\hat{x} (\hat{x} \cdot \vec{p}_\omega) - \vec{p}_\omega) \frac{1 - ikr}{r^2} - k^2 \hat{x} \times (\hat{x} \times \vec{p}_\omega) \right]$$

# Radiação de dipolo

- Lembre-se que estamos assumindo que estamos na zona de radiação, ou seja, que  $r \gg \lambda$ ,  $kr \gg 1$ . Portanto, retornando à nossa definição  $\vec{k} = (\omega/c)\hat{x}$ , obtemos que:

$$\vec{H}_\omega^{E-dip} \simeq \frac{kc}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{k} \times \vec{p}_\omega, \text{ e}$$

$$\vec{E}_\omega^{E-dip} \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{p}_\omega), \text{ ou seja,}$$

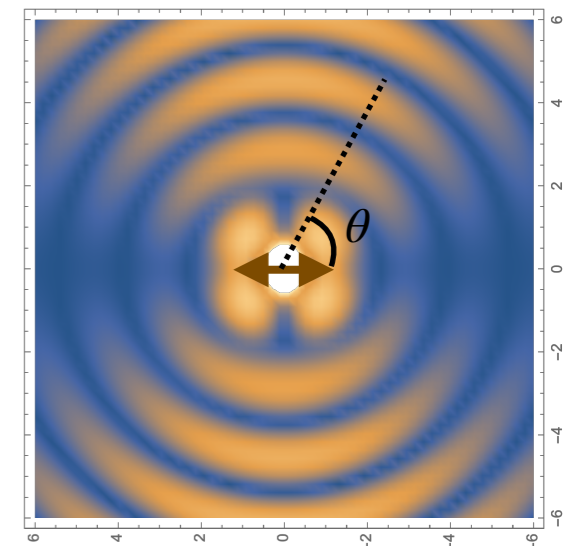
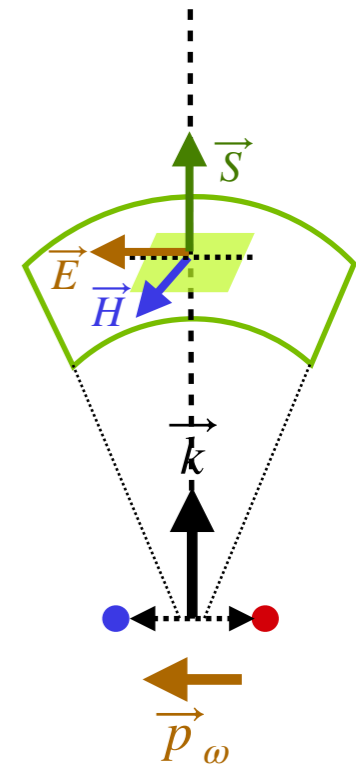
$$\vec{E}_\omega^{E-dip} = -\frac{Z_0}{k} \vec{H}_\omega^{E-dip} \times \vec{k}$$

- É extremamente curioso (mas necessário!) que os campos elétrico e magnético emergem desses cálculos exatamente como deveriam: **ortogonais um ao outro!** De fato, a partir desses resultados podemos escrever o **vetor de Poynting** associado com essa radiação de dipolo:

$$\vec{S}_\omega^{E-dip} = \vec{E}_\omega^{E-dip} \times \vec{H}_\omega^{E-dip} = Z_0 |\vec{H}_\omega^{E-dip}|^2 \hat{k}$$

- A **potência irradiada** sobre uma superfície qualquer é portanto:

$$P_\omega = \int d\vec{A} \cdot \vec{S}_\omega^{E-dip} \Rightarrow \langle P_\omega \rangle_t = \frac{Z_0 k^4 c^2}{32\pi^2} p_\omega^2 \sin^2 \theta \text{ (numa casca esférica qqr)}$$



(Ver notebook Mathematica)



---

# Próxima aula:

- Ondas eletromagnéticas: propagação
- Polarização
- Condições de contorno
- Refração da luz
  
- Griffiths, Cap. 9