ENUNCIADOS DOS PROBLEMAS

P5: Crescimento populacional segundo Malthus-Verhulst

Thomas Malthus (1766-1834, cientista social inglês) postulou que a taxa instantânea de crescimento $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ de uma população é proporcional ao tamanho $P = P(t)$ da população no instante t. Por sua vez, Pierre Verhulst (1804-1849, matemático belga) introduziu um termo a fim de limitar o crescimento da população, cujo tamanho é então governado pela seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = C_\mathrm{M} P - C_\mathrm{V} P^2 \qquad , \qquad \text{sujeito a } \; P = P_0 \; \text{ em } \; t = t_0$$

sendo P_0 o tamanho da população em um dado instante t_0 conhecido. Com o tamanho P expresso em milhões de habitantes e o tempo t em anos, em 1845 Verhulst postulou $C_\mathrm{M} = 0.030$ e $C_\mathrm{V} = 0.00016$ às constantes de proporcionalidade referentes ao crescimento da população nos EUA, que em 1800 era de 5.3 milhões de habitantes. Pede-se para resolver numericamente a EDO para estimar a população dos EUA anualmente de 1800 até 2000. O arquivo MS Excel (ZEB0562_2021_2s_P5) tem os valores P_0, C_M e C_V referentes ao problema. A título de comparação, as previsões numéricas (segundo Verhulst) podem ser confrontadas com valores da tabela a seguir (a partir de censos realizados nos EUA):

Ano do censo EUA	1800	1830	1860	1890	1920	1950	1980	2000
Habitantes (milhões)	5.3	12.9	23.2	50.2	92.2	132.2	236.5	281.4

P6: Reação de síntese bimolecular isotérmica

Reações de síntese são aquelas em que 2 ou mais reagentes produzem 1 única substância (produto). Considere uma reação de síntese bimolecular isotérmica relativamente simples do tipo A + B $\rightarrow$ C, em que inicialmente α moles/L do reagente A são combinados com β moles/L do reagente B para gerar o produto C. Nesta particular reação, os coeficientes estequiométricos são unitários de modo que:

Instante	**Concentração: reagente A**	**Concentração: reagente B**	**Concentração: produto C**
$t = 0$ (inicial)	α	β	0
t (posterior)	$\alpha - n(t)$	$\beta - n(t)$	$n(t)$

em que $n(t)$ é o número de moles/L já consumidos dos reagentes A e B e também, no caso, de produto C gerado até o instante posterior t. Como a lei de ação das massas afirma que, à temperatura constante, a taxa da reação química $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ é proporcional ao produto das concentrações dos reagentes, esta taxa no instante t é expressa através da seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = k(\alpha - n)(\beta - n)$$

em que a constante de proporcionalidade k depende da temperatura na qual ocorre a reação. Considere uma reação com k = 25 L/(mol·s), α = 0.10 mol/L e β = 0.20 mol/L, que estão no arquivo MS Excel (ZEB0562_2021_2s_P6) referente ao problema. Para tais valores, resolva numericamente para estimar em que instante $t_{1/2}$ a concentração do reagente A se reduz à metade $\alpha/2$ (no caso, a solução analítica fornece $t_{1/2} \cong 0.1622$ s). No método numérico de solução, adote parâmetros adequados para reproduzir o instante $t_{1/2}$ com 4 casas decimais.

P7: Altitude mínima para abertura de paraquedas

Quantidades que descrevem os movimentos de objetos incluem a posição s, a velocidade $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ e a aceleração $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$. A posição $s = s(t)$ em função do tempo t de um objeto em movimento pode ser obtida determinada resolvendo a 2ª lei de Newton, qual seja:

$$F_{\text{resultante}} = ma \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{resultante}} = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

sujeita às condições $s(0) = s_0$ (posição inicial) e $v(0) = v_0$ (velocidade inicial).

Um paraquedista de massa m abre seu paraquedas no instante $t = 0$ fazendo com que, além da força peso P com aceleração gravitacional g, passe a atuar uma força de resistência do ar (F_{ar}) proporcional à velocidade instantânea, sendo K_{ar} a constante de proporcionalidade. Adotando sentido positivo para baixo, a 2ª lei de Newton assume a forma:

$$F_{\text{resultante}} = P - F_{\text{ar}} \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg - K_{\text{ar}}v \qquad \xrightarrow{\div m} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{K_{\text{ar}}}{m}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Adotando como posição inicial $s(0) = s_0 = 0$, então s mede a distância em direção ao solo a partir da posição de abertura do paraquedas. Nesta posição, o paraquedista tem velocidade inicial $v(0) = v_0$, que é superior à velocidade terminal $v_{\text{term}} = mg/K_{\text{ar}}$ referente à velocidade assintótica que pode ser atingida. Pede-se para avaliar a distância s_{final} a partir da posição de abertura do paraquedas a fim de chegar ao solo no instante t_{final} com velocidade final 1% acima do valor assintótico, ou seja, $v_{\text{final}} = 1.01\, v_{\text{term}}$.

Resolva numericamente para os valores: massa do paraquedista m = 70 kg, aceleração da gravidade g = 9.8 m/s^2, constante de proporcionalidade da resistência do ar K_{ar} = 110 kg/s, velocidade no instante de abertura do paraquedas v_0 = 52 m/s, que estão no arquivo MS Excel (ZEB0562_2021_2s_P7) referente ao problema. Para tais valores, a solução analítica é $s_{\text{final}} \cong 55.27$ m. No método numérico de solução, adote parâmetros adequados para reproduzir este resultado analítico com 2 casas decimais.