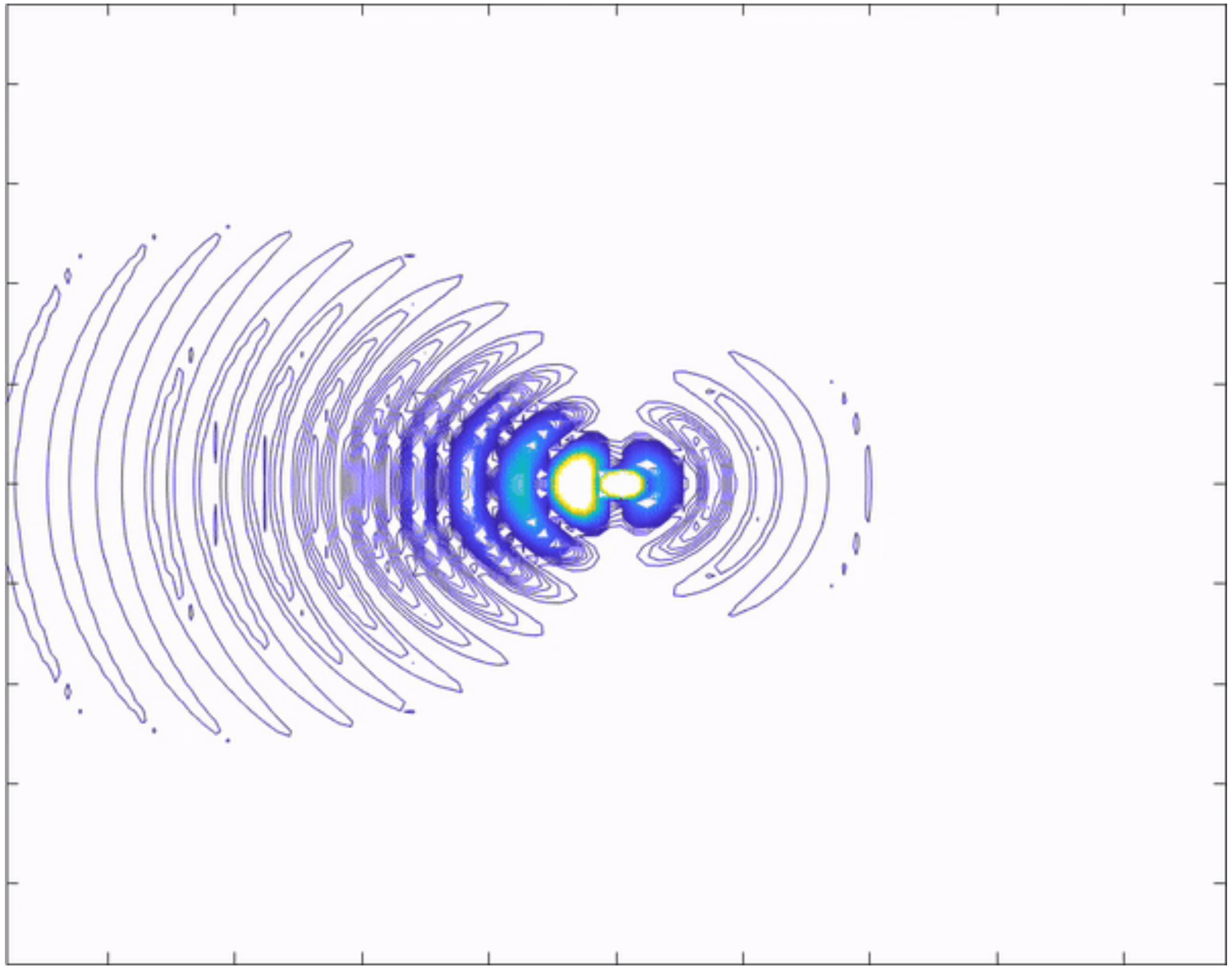


Radiação eletromagnética

- ⚡ Solução exata, completa e definitiva
- ⚡ Funções de Green e propagadores
- ⚡ Interpretação: relatividade e causalidade

Radiação eletromagnética

- As Equações de Maxwell no vácuo são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$ (Lei de Gauss para o campo elétrico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (Lei de Gauss para o campo magnético)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$ (Lei de Ampère; $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (Lei de Faraday)

- Os campos podem ser também escritos em termos dos ***potenciais eletromagnéticos***:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

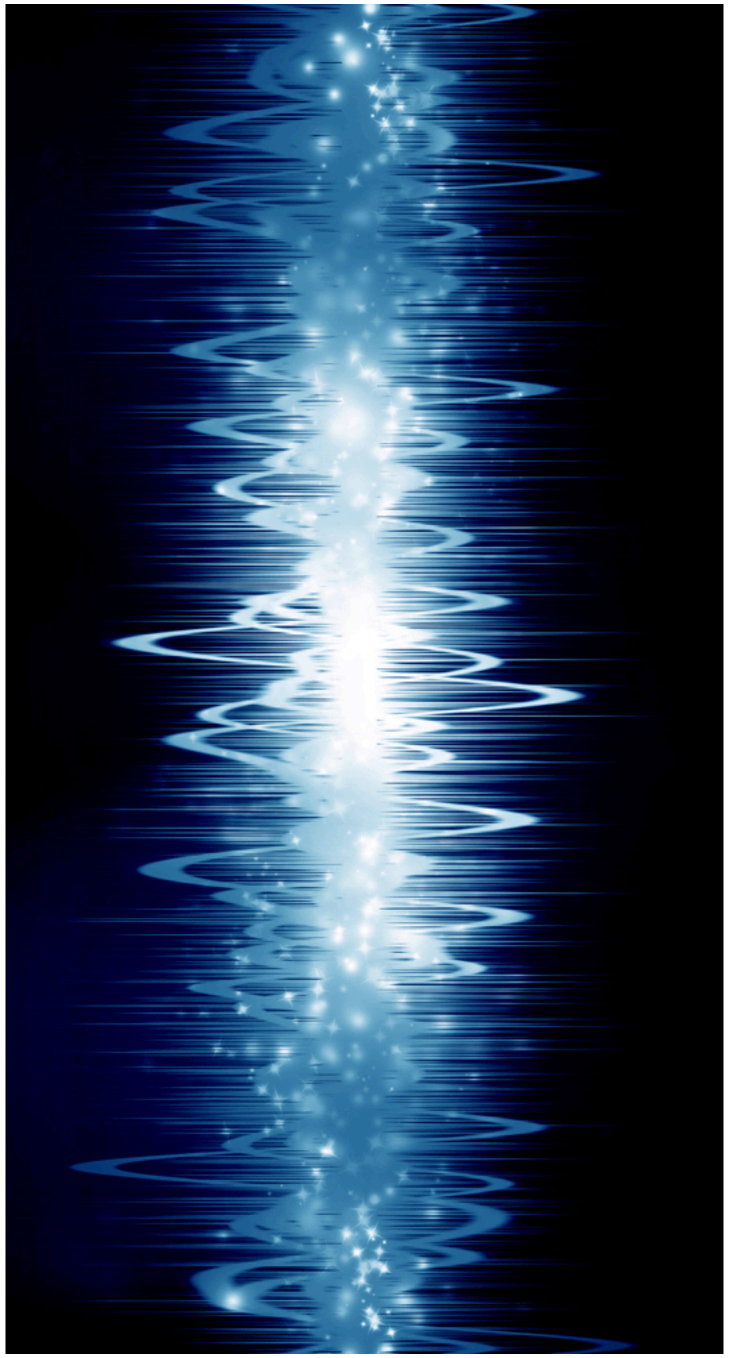
- Escolhendo o calibre de Lorentz, no qual:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$, vimos numa das nossas aulas passadas que chegamos às equações para os potenciais:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

onde $\square = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, o ***D'Alembertiano***, é o operador da ***Equação de Onda***.



Radiação eletromagnética

- Nesta aula eu vou resolver explicitamente a equação:

$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad ,$$

e portanto também a equação:

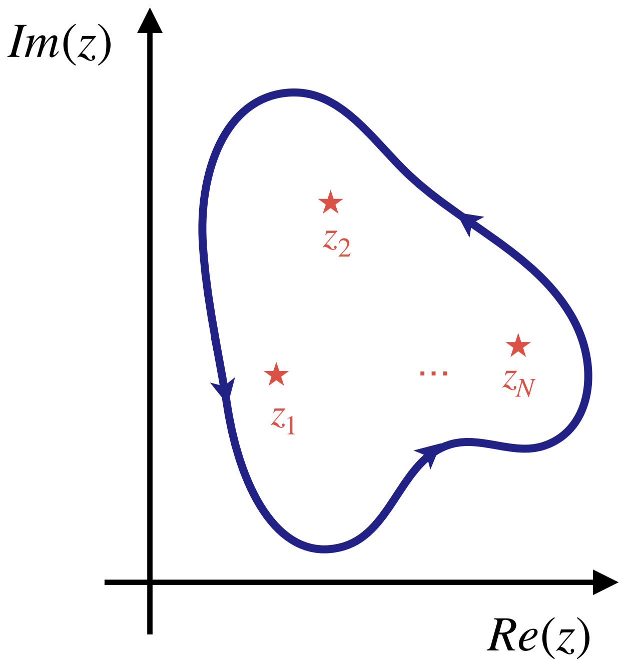
$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \, \vec{J} \ .$$

- Essa solução será completamente geral, para quaisquer fontes $\rho(\vec{x}, t)$ e $\vec{J}(\vec{x}, t)$.
- Para isso, vamos nos valer do conceito da Função de Green. Como vimos antes neste curso:

$$D_x \, f(x) = s(x) \quad \to \quad D_x \, G(x, x') = \delta(x - x') \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int dx' \, G(x, x') \, s(x')$$

- No meio do caminho para encontrar a solução dessa equação (ou seja, a função de Green) vamos utilizar o ***Teorema de Cauchy***, que nos diz que:

$$\oint dz \, f(z) = 2\pi \, i \sum_j \mathrm{Res}[f(z_j)]$$



A Eq. de onda e a Eq. de Helmoltz

- O primeiro passo na nossa construção dessa solução completa e definitiva é passar do espaço "real" para o ***espaço de Fourier***. Note que temos de ***transformar os campos e as fontes***. Para a parte puramente espacial temos:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \quad ,$$

e para a dependência temporal temos a transformada de Fourier nos levando ao espaço de frequências:

$$\tilde{f}(\omega) = \int dt \, e^{-i\omega t} f(t) \quad \leftrightarrow \quad f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

- Uma das propriedades mais úteis das transformadas de Fourier é o fato que as derivadas ficam:

$$\vec{\nabla} \to -i\vec{k} \quad , \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$$

- Portanto, em geral uma função do espaço e do tempo (como os campos e densidades/correntes) fica:

$$\tilde{f}(\omega, \vec{k}) = \int d^3x \int dt \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} f(t, \vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad f(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \tilde{f}(\omega, \vec{k})$$

- Vamos agora então tomar a transformada de Fourier da nossa equação fundamental:

$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\omega^2}{c_s^2}\tilde{\phi} + \vec{k}^2\tilde{\phi} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon} \quad , \quad \text{com a solução imediata:} \quad \tilde{\phi} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon}\frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

Se tivéssemos efetuado uma transformação de Fourier apenas no tempo, e se não tivéssemos fontes, essa seria a ***equação de Helmholtz***:

$$\frac{\omega^2}{c_s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\phi = 0$$

A Eq. de onda com fontes

- OK, mas essa solução não é uma solução "real", o que precisamos é dos potenciais (e campos) no espaço real e como função do tempo:

$$\phi(t,\vec{x}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i(\vec{k}\,\vec{x}-\omega t)}\,\tilde{\phi}(\omega,\vec{k}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i(\vec{k}\,\vec{x}-\omega t)}\,\frac{\tilde{\rho}}{\epsilon}\,\frac{1}{\vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

- A ideia é que podemos substituir a transformadas de Fourier da densidade de cargas de volta nessa equação, e trabalhar nessa expressão até chegar num resultado que seja em termos da densidade de cargas. Nós temos:

$$\tilde{\rho}(\omega,\vec{k}) = \int d^3x' \int dt'\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}'-\omega t')}\,\rho(t',\vec{x}') \qquad ,$$

  Note que não podemos confundir as variáveis de integração $\{t', \vec{x}'\}$ com o tempo e a posição onde medimos o potential $\phi(t,\vec{x})$!

- Temos, portanto:

$$\phi(t,\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\epsilon}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i(\vec{k}\,\vec{x}-\omega t)}\,\frac{1}{\vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}\int d^3x' \int dt'\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}'-\omega t')}\,\rho(t',\vec{x}')$$

  o que podemos reescrever como:

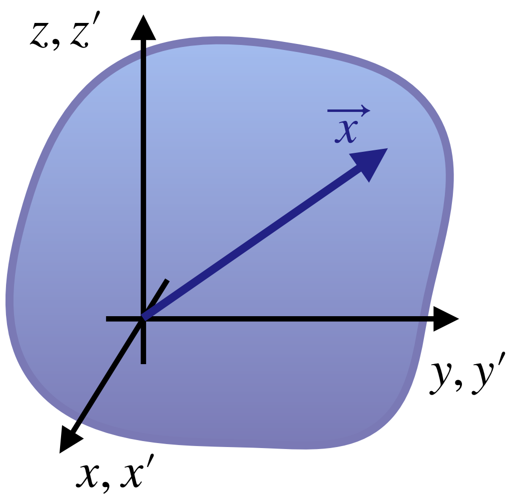
$$\phi(t,\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\epsilon}\int d^3x' \int dt'\,\rho(t',\vec{x}')\boxed{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{2\pi}\;\frac{e^{-i\left[\vec{k}\,(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t')\right]}}{\vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}}$$

Função de Green para a equação de onda com fontes: $G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$

A função de Green da Eq. de onda

- Assim, transformamos nosso problema num outro, mais geral: calcular a função de Green para a Eq. de onda:

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-i\left[\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t')\right]}}{\vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}} \quad , \quad \text{com}$$

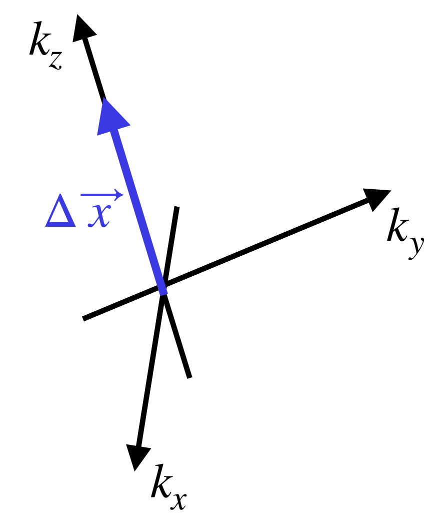


$$\phi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \int dt' \,\frac{\rho(t',\vec{x}')}{\epsilon} G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$$

- Na expressão da função de Green é melhor começar tentando fazer a integral da parte espacial. Definindo por simplicidade $\Delta t = t - t'$ e $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}'$ temos:

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\left(\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}-\omega\Delta t\right)}}{\vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

- Na integral sobre $\vec{k}$ nós temos a liberdade de escolher o sistema de coordenadas, e portanto escolhemos de tal forma que o eixo k_z fica alinhado com a direção de $\Delta\vec{x}$, o que leva ao resultado:

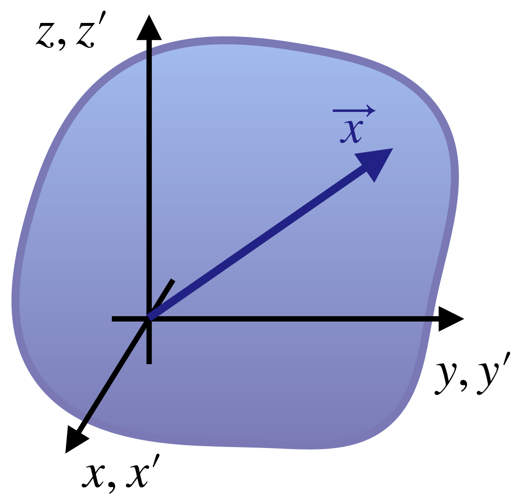


$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \int \frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i\omega\Delta t}\int \frac{k^2dk\,d(\cos\theta_k)\,d\varphi_k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-ik\Delta x\cos\theta_k}}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

que é muito mais simples de integrar!

A função de Green da Eq. de onda

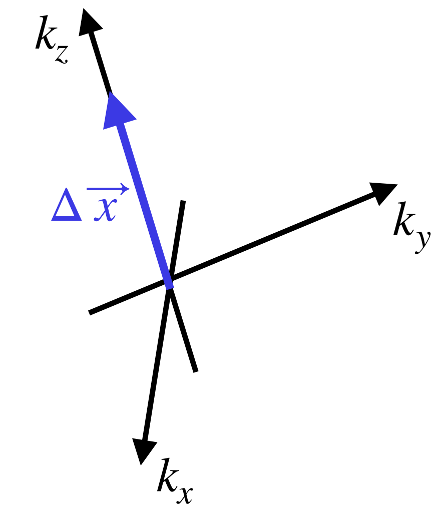
- Nesse sistema de coordenadas "rodado" a integral fica (com $\cos\theta_k = \mu$):



$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i\omega\Delta t}\int_0^{\infty}k^2dk\int_{-1}^{1}d\mu\,\frac{e^{-ik\Delta x\mu}}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}\int_0^{2\pi}d\varphi_k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,e^{i\omega\Delta t}\int_0^{\infty}k^2dk\,\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}\int_{-1}^{1}d\mu\,e^{-ik\Delta x\mu}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,e^{i\omega\Delta t}\int_0^{\infty}k^2dk\,\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}\,\frac{2\,\sin k\Delta x}{k\Delta x}$$



- Agora reescrevemos essa expressão como:

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}k^2dk\,\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,\frac{e^{i\omega\Delta t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}$$

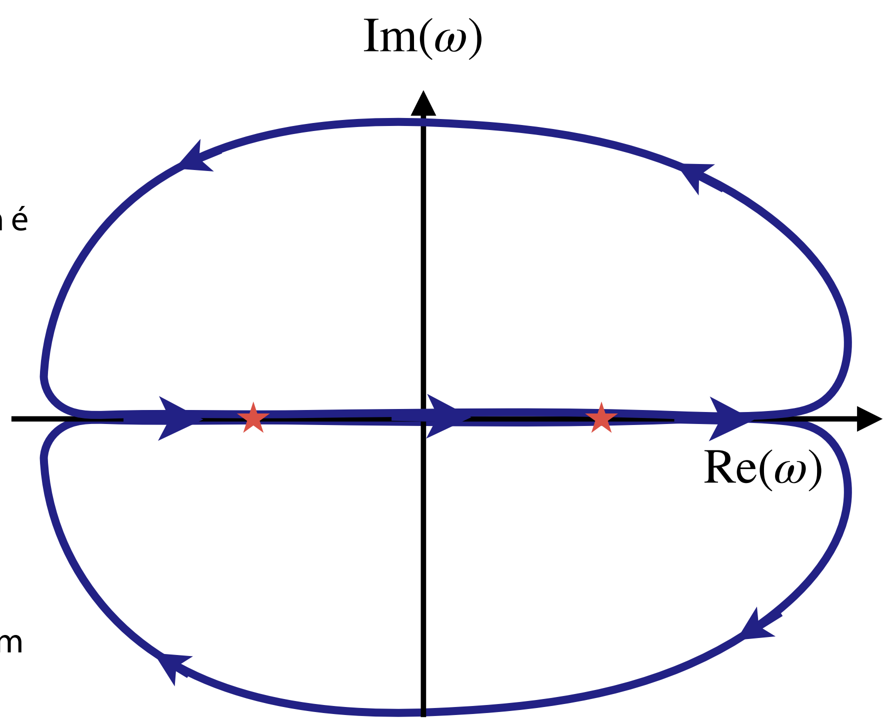
- A ideia agora é calcular essa última integral no plano de ω complexo, e usar o Teorema de Cauchy.

A função de Green da Eq. de onda

- Recordando: nós vimos que a Eq. de onda com fontes tem como solução:

$$\phi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \int dt' \, \frac{\rho(t',\vec{x}')}{\epsilon} G(t,\vec{x};t',\vec{x}') \quad , \quad \text{onde}$$

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, k^2 \,\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \,\frac{e^{i\omega\Delta t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}$$



- O integrando dessa última integral é transformada de Fourier do operador de onda (o D'Alembertiana), que também é chamado de **propagador** — já que é ele o responsável por "propagar" o sinal desde a fonte.

- O nosso propagador tem **pólos** em $\omega = \pm c_s k$, e esses são pólos simples, de primeira ordem:

$$\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}} = \frac{1}{\left(k-\frac{\omega}{c_s}\right)\left(k+\frac{\omega}{c_s}\right)}$$

- O sinal da exponencial, $e^{i\omega\Delta t}$, nos diz que, se $\Delta t > 0$, então devemos fechar o contorno "por cima", $\mathrm{Im}(\omega) \to \infty$; e se $\Delta t < 0$, então temos de fechar o contorno "por baixo", $\mathrm{Im}(\omega) \to -\infty$. Essa escolha está também conectada com a questão de onde devemos considerar os pólos: dentro ou fora do contorno? (Se ambos estiverem fora, o resultado seria zero!)

- Mas vamos inspecionar a expressão para ϕ: ela nos dá o campo $\phi(t,\vec{x})$, num instante t, que foi gerado por uma fonte num instante t'. Portanto, está claro que para uma solução "física" neste caso temos de escolher $\Delta t = t - t' > 0$, de tal modo que o "efeito" (o potencial) apareça ***depois*** da "causa" (as fontes/cargas).

- Portanto, escolhemos $\Delta t > 0$ e o lado de cima do contorno, o que nos dá o sinal usual para o Teorema de Cauchy:

$$\oint dz\, f(z) = +2\pi i \sum_j \mathrm{Res}[f(z_j)]$$

A função de Green da Eq. de onda

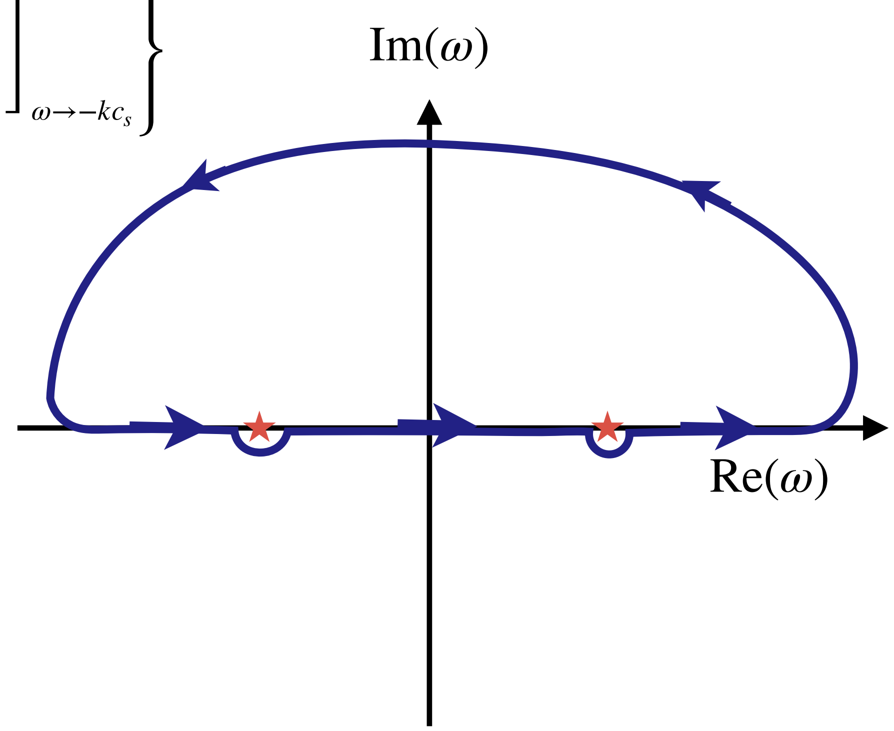
- Fechando o circuito por cima temos então a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\left(k-\frac{\omega}{c_s}\right)\left(k+\frac{\omega}{c_s}\right)} = -c_s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\Delta t}}{(\omega - kc_s)(\omega + kc_s)}$$

$$= -c_s^2\, 2\pi i \left\{ \left[\frac{e^{i\omega\Delta t}}{(\omega - kc_s)(\omega + kc_s)} (\omega - kc_s) \right]_{\omega\to kc_s} + \left[\frac{e^{i\omega\Delta t}}{(\omega - kc_s)(\omega + kc_s)} (\omega + kc_s) \right]_{\omega\to -kc_s} \right\}$$

$$= -c_s^2\, 2\pi i \left\{ \frac{e^{ikc_s\Delta t}}{2kc_s} + \frac{e^{-ikc_s\Delta t}}{-2kc_s} \right\}$$

$$= -c_s^2\, 2\pi i \times i \frac{\sin kc_s\Delta t}{kc_s} = 2\pi\, c_s^2 \frac{\sin kc_s\Delta t}{kc_s}$$



- Substituindo de volta na função de Green temos:

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}\,') = \frac{2\,c_s^2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk\, k^2 \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \frac{\sin kc_s\Delta t}{kc_s}$$

$$= \frac{c_s}{2\pi^2\,\Delta x} \int_0^{\infty} dk\, \frac{\cos(k\Delta x - kc_s\Delta t) - \cos(k\Delta x + kc_s\Delta t)}{2}$$

- Estamos quase terminando. Só temos de notar agora que o integrando acima é par (simétrico) sob $k \leftrightarrow -k$, o que permite escrever:

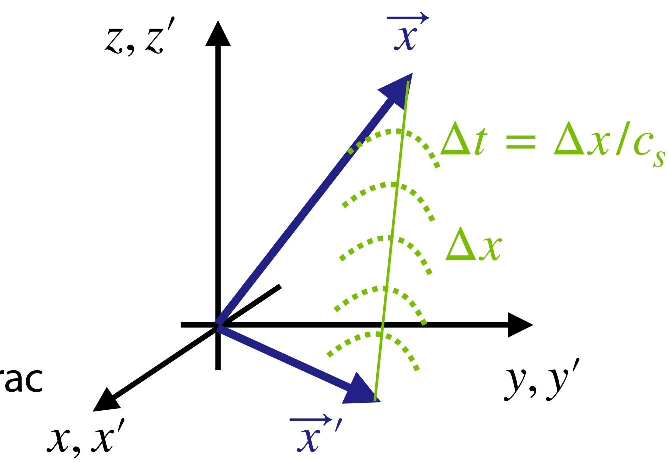
$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}\,') = \frac{c_s}{4\pi^2\,\Delta x} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\cos(k\Delta x - kc_s\Delta t) - \cos(k\Delta x + kc_s\Delta t)\right]$$

A função de Green da Eq. de onda

- Finalmente, lembre que $\cos\alpha = \mathrm{Re}[e^{i\alpha}]$, e portanto temos:

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \frac{c_s}{8\pi^2\,\Delta x}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\left[e^{i\,k(\Delta x - c_s\Delta t)} - e^{i\,k(\Delta x + c_s\Delta t)}\right]$$

$$= \frac{c_s}{8\pi^2\,\Delta x}\,\mathrm{Re}\,2\pi\left[\delta(\Delta x - c_s\Delta t) - \delta(\Delta x + c_s\Delta t)\right]$$



- Agora, note que nós assumimos que $\Delta t > 0$, e como $\Delta x = |\vec{x} - \vec{x}'| > 0$, a segunda função delta de Dirac é identicamente nula, sempre. Isso nos traz ao resultado final para a função de Green:

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \frac{c_s}{4\pi\,\Delta x}\,\delta(\Delta x - c_s\Delta t) \qquad \text{ou melhor:} \qquad G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \frac{c_s\,\theta(\Delta t)}{4\pi\,\Delta x}\,\delta(\Delta x - c_s\Delta t)$$

- Essa é a chamada **Função de Green retardada** para a equação de onda (e para o Eletromagnetismo!).

- O argumento da função delta de Dirac nos diz que só podemos ter uma resposta a uma fonte em $\{t', \vec{x}'\}$ numa posição $\vec{x}$ ***após*** um intervalo de tempo $\Delta t = \Delta x/c_s$, ou seja, num instante $t = t' + \Delta x/c_s$ posterior a t'. Ou, dito de outro modo: $t' = t - \Delta x/c_s$, o que chamamos de ***tempo retardado***.

- Note que podemos também usar as propriedades de transformação da função delta de Dirac para escrever:

$$\delta(\Delta x - c_s\Delta t) = \frac{1}{c_s}\delta\left(\frac{\Delta x}{c_s} - \Delta t\right) = \frac{1}{c_s}\delta\left[\frac{\Delta x}{c_s} - (t - t')\right] = \frac{1}{c_s}\delta\left[t' - \left(t - \frac{\Delta x}{c_s}\right)\right]$$

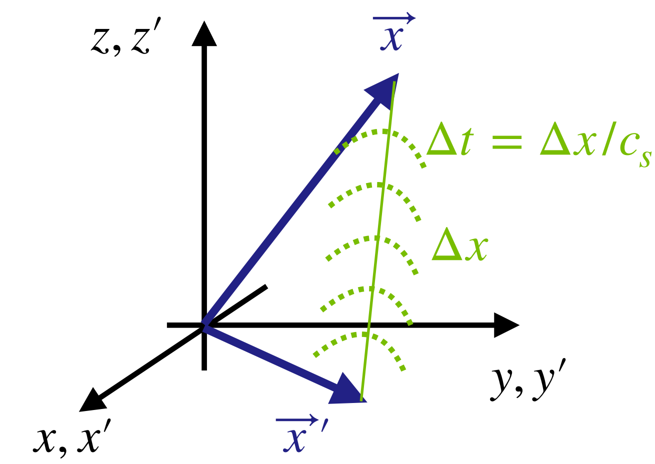
A função de Green da Eq. de onda

- Finalmente, podemos inserir a função de Green retardada em sua forma final,

$$G(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{1}{4\pi\,\Delta x}\,\delta(t'-t+\Delta x/c_s)$$, dentro da integral para o potential:

$$\phi(t,\vec{x}) = \int d^3x' \int dt' \,\frac{\rho(t',\vec{x}')}{\epsilon} G(t,\vec{x};t',\vec{x}')$$, resultando em:

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3x' \,\frac{\rho(t_{Ret},\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$, onde $t' \to t_{Ret} = t - \Delta x/c_s$



- A interpretação é clara: se movimentamos uma densidade de carga em um ponto $\vec{x}'$, o potencial na posição $\vec{x}$ só vai responder a esse movimento após um tempo $\Delta x/c_s$.

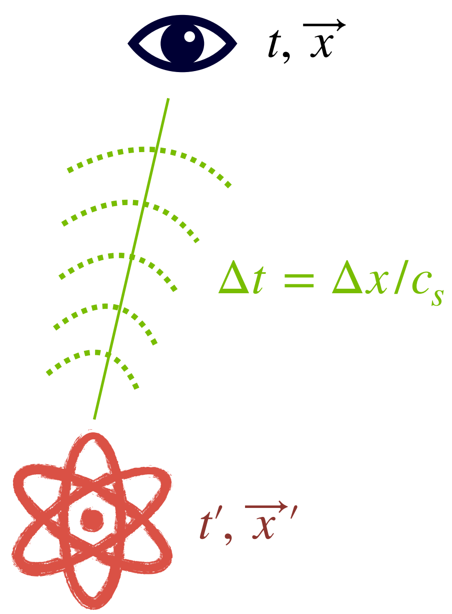
- Em outras palavras: a informação da fonte se propaga com uma velocidade c_s, que no vácuo é $c = \sqrt{1/\mu_0\epsilon_0}$=299,792,458 m/s .

- Mas e quanto ao potencial-vetor $\vec{A}$? Bem… a equação (ao menos em coordenadas Cartesianas) é exatamente a mesma, portanto a solução também é idêntica:

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3x' \,\frac{\vec{J}(t_{Ret},\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

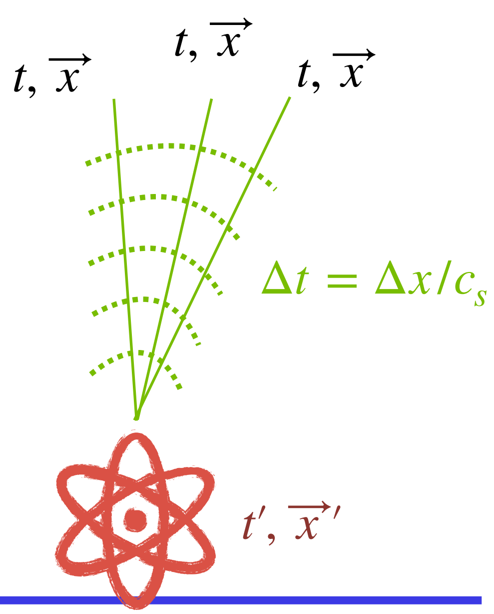
Funções de Green retardada e avançada

- Agora vamos revisar o nosso cálculo e tentar entender melhor o que fizemos.
- Por exemplo, fizemos uma escolha de impor que $\Delta t > 0$, o que equivale dizer que os campos são gerados pelas cargas, e não o contrário. Isso é verdade quase sempre, e a situação deveria ser mais ou menos como mostrado na figura ao lado: algumas cargas ou correntes se movem, e o sinal se propaga no espaço e no tempo, alterando o potencial num ponto distante, um certo tempo depois.



- Mas imagine que invertemos a seta do tempo, de tal forma que uma configuração de campos é criada em torno das cargas, e que ela é lançada em direção às cargas. Ao chegar na posição das cargas, esses campos provocam um movimento nelas que imita (de trás para frente) o movimento que gerou os campos no exemplo anterior.
- Mas se temos uma situação dessas, então teríamos de fazer o oposto da escolha anterior: o correto seria tomar $\Delta t < 0$, e fazer um cálculo um pouco diferente, no qual ao invés do tempo retardado na função de Green teríamos o ***tempo avançado***:

$$t' = t_{Adv} = t + \Delta x / c_s \qquad \text{e} \qquad \phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3x' \, \frac{\rho(t_{Adv}, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



- Note que nessa situação os campos são a causa, e o movimento das cargas e correntes são a consequência! Então, afinal de contas, o que resulta dessa discussão é, no fundo, uma confirmação da ***descrição causal dos eventos*** — exceto que esse segundo caso soa meio esquisito e pouco natural, pois parece que estamos quase violando a segunda lei da Termodinâmica!

O cone de luz

- Os resultados obtidos hoje introduziram alguns conceitos centrais não só para a Eletrodinâmica, mas em teorias de campos relativísticas — o cone de luz, definido como:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2 = 0$$

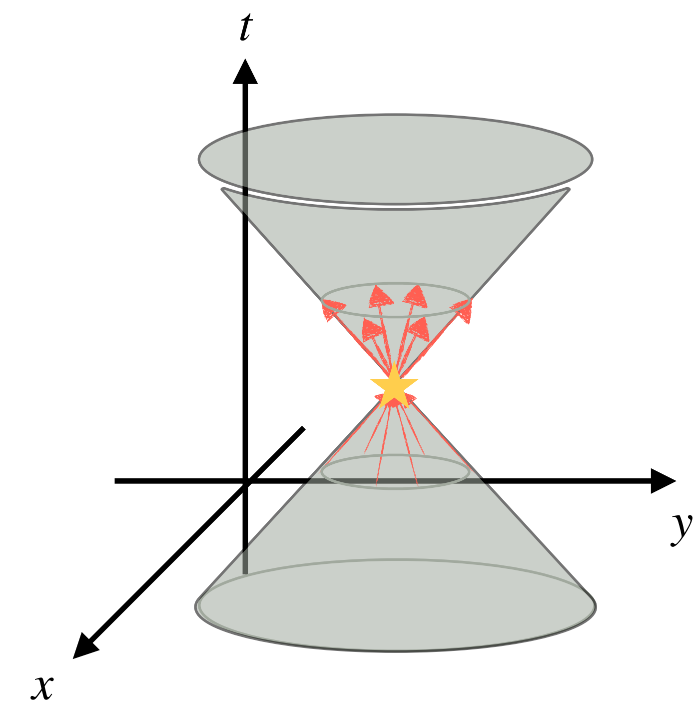
- Pense nesse diagrama em termos da função de Green: a estrela é uma fonte dos campos (em $t', \vec{x}'$), e o observador está numa posição genérica $t, \vec{x}$.

- O **cone de luz** é definido por as $\Delta s^2 = 0$, que podemos visualizar em termos do diagrama de tempo-espaço à direita.

- A região do cone de luz com $\Delta t > 0 \;\; (t > t')$ é chamada de **cone de luz futuro** do ponto $t', \vec{x}'$. A função de Green retardada nos diz que sinais emitidos pela fonte viajam pela superfície desse cone de luz futuro.

- Por outro lado, a função de Green avançada nos diz que os campos que chegam na fonte em $t', \vec{x}'$ se propagam sobre o **cone de luz passado.**

- E, finalmente, objetos fora do cone de luz não afetam a fonte naquele instante e naquela posição, nem podem ser afetados por ela. ***Isso*** é ***causalidade***!



Próxima aula:

- Radiação eletromagnética: os campos elétrico e magnético de radiação
- Equações de Jefimenko e os potenciais de Liénard-Wiechert
- Radiação de Dipolo

- Griffiths, Caps. 10 e 11
- Leitura complementar: Jackson, Caps. 9 e 12