4^a Lista de Exercícios — Eletromagnetismo 1 — 2021
Entrega: 10 de Dezembro

4.1 – Um campo eletromagnético é descrito pelos potenciais:

$$\varphi = \frac{2B_0}{\mu_0\epsilon_0}\, t \quad , \quad \vec{A} = B_0\left[\vec{x} + (y \,\mathrm{sen}\,\omega t - 3z)\hat{z}\right] \ ,$$

onde B_0 e ω são constantes.

(a). Encontre os campos elétrico e magnético

(b). Mostre que as equações de Maxwell estão satisfeitas

(c). Encontre a corrente de deslocamento de Maxwell dessa configuração, $\vec{J}_D$.

(d). Encontre a densidade de corrente $\vec{J}$.

(e). Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$ e interprete esse resultado.

4.2 – Vamos imaginar que existem cargas magnéticas ("monopolos" magnéticos), de forma que duas das equações de Maxwell teriam que ser alteradas:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad &\to \qquad \nabla\cdot\vec{B} = \mu_0\rho_m, \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad &\to \qquad \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\vec{J}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

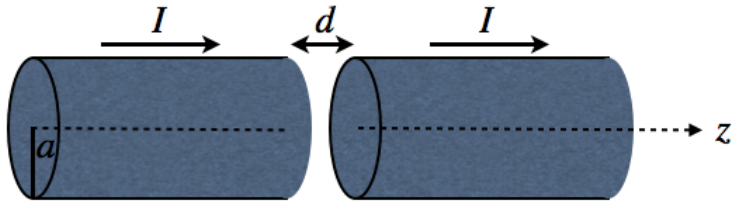
onde ρ_m é a densidade de cargas magnéticas, e $\vec{J}_m$ é a densidade de corrente magnética, que são relacionadas por uma equação de continuidade tal como aquela que vale para cargas elétricas, $\nabla\cdot\vec{J}_m + \frac{\partial\rho_m}{\partial t} = 0$

(a). Ainda seria possível expressar os campos elétrico e magnético por meio de potenciais? Se você acha que sim, então quantos potenciais seriam necessários, e como eles se relacionam com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Como ficaria a invariância por transformações de calibre nesse caso? [Dica: atenção às dimensões dos campos e dos potenciais!]

(b). Mostre que as equações de Maxwell na presença de cargas magnéticas são invariantes sob as transformações:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}\cos\alpha + c\vec{B}\sin\alpha \\ c\vec{B}' &= c\vec{B}\cos\alpha - \vec{E}\sin\alpha \\ q_e' &= cq_e\cos\alpha + q_m\sin\alpha \\ q_m' &= q_m\cos\alpha - cq_e\sin\alpha \end{aligned}$$

4.3 – Considere um fio grosso, de raio a, que leva uma corrente I, homogeneamente distribuída pelo volume do fio. O fio é reto e muito longo, mas em um certo ponto ele tem um pedaço que foi cortado, de forma que está faltando um pequeno trecho, de comprimento $d \ll a$ — veja a figura abaixo:
Esse pedacinho que falta no fio (o "intervalo" de largura d) não altera a corrente, de forma que você pode pensar nas faces opostas do fio, em cada lado do intervalo, como um capacitor de placas paralelas. Considere que a corrente é nula inicialmente, e começa a fluir na direção z no instante $t = 0$.



(a). Encontre os campos elétrico e magnético no intervalo de largura d, em função do tempo t e da distância (r) ao eixo que passa pelo centro do fio. Indique a direção e o sentido dos campos.

(b). Encontre a densidade de energia do campo eletromagnético no intervalo.

(c). Calcule o vetor de Poynting no intervalo, indicando a sua direção.

(d). Determine a energia total no intervalo como uma função do tempo. Calcule a potência que é transmitida para dentro do intervalo, integrando o vetor de Poynting numa superfície apropriada, e verifique que essa potência corresponde à taxa de variação da energia total no intervalo. [Dica: despreze os efeitos de borda do capacitor.]

4.4 – Suponha que exista, numa certa região do espaço, um campo eletrostático e um campo magnetostático. Demonstre que, mesmo que o vetor de Poynting seja não-nulo, a integral de superfície de $\vec{S} \cdot \hat{n}$ sobre uma superfície arbitrária fechada nessa região é sempre nula.

4.5 – Frequentemente é útil escrever uma onda plana monocromática usando a fórmula de Euler, e tomando a parte real dessa onda:

$$\vec{E} = Re\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}\right] \equiv Re\left[\tilde{E}\right] \;, \qquad \vec{B} \equiv Re\left[\tilde{B}\right] = Re\left[\frac{1}{c}\hat{k}\times\tilde{E}\right] \;.$$

Mostre que podemos escrever a *média temporal* da densidade de energia do campo eletromagnético em termos desses campos complexos, como:

$$\langle u_{EM}\rangle_t = \frac{1}{4}Re\left[\varepsilon_0\tilde{E}\cdot\tilde{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\tilde{B}\cdot\tilde{B}^*\right] \;.$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Similarmente, mostre que a média temporal do vetor de Poyting é dada por:

$$\langle\vec{S}_P\rangle_t = \frac{1}{2\mu_0}Re\left[\tilde{E}\times\tilde{B}^*\right] \;.$$

4.6 – Um plasma pode ser pensado como um gás clássico de íons e elétrons. A interação de uma onda eletromagnética será muito mais forte com os elétrons livres do que com os íons, já que estes têm massa muito maior.

a) Para uma onda plana, reescreva as equações de Maxwell usando as correspondências que seguem das transformadas de Fourier, $\nabla \to i\vec{k}$ e $\partial/\partial t \to -i\omega$.

b) Dado $\vec{J} = -eN\vec{v}$, a definição da densidade de corrente livre elétrons, onde N é a densidade e e a carga dos elétrons, mostre que a densidade de corrente induzida pelo campo elétrico da onda é:

$$\vec{J} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E} \;,$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, e ω é a frequência da onda. Note que podemos escrever $\vec{J} = -en\vec{v}$, onde v é a velocidade dos elétrons. [**Dica**: Desconsidere a contribuição de $\vec{B}$ para força de Lorentz na equação de movimento.]

c) Utilizando a equação de Ampère-Maxwell e a Lei de Gauss na fomulação do item a), obtenha uma relação para k, tal que $k(\omega)$. Baseado nesta relação, ondas com qualquer frequência podem se propagar no interior do plasma? Justifique sua resposta e identifique em um gráfico $k \times \omega$ as regiões onde pode ou não existir propagação (um esboço feito a mão já é o suficiente).

4.7 – [Ex. 10.19 do Griffiths] Calcule os campos elétrico e magnético de um fio reto e infinito, com densidade de carga λ, que se move com velocidade constante v na direção do fio. (*Dica: você pode usar as fórmulas para os campos de cargas pontuais em movimento retilíneo e uniforme, e integrar a distribuição dessas cargas ao longo do fio.*) Pense bem, e veja que você talvez pudesse obter esse mesmo resultado de um outro jeito mais "esperto" e menos trabalhoso.

4.8 – Considere um plano infinito em $z = 0$ no qual fazemos passar uma densidade de corrente que oscila no tempo como $\vec{J}(t,z) = J_0\, \delta(z)\, e^{-i\omega t}\, \hat{x}$. Ou seja, é como se esse plano tivesse uma certa carga superficial, e ele se movimentasse por meio de oscilações harmônicas na direção x. Neste problema vamos verificar como a corrente na superfície desse plano inifinito gera ondas planas monocromáticas se propagando na direção z.

a) Mostre que a densidade de cargas desse sistema físico é constante, $\partial\rho/\partial t = 0$ – ou seja: o plano infinito em $z = 0$ pode apenas ter uma densidade de carga superficial constante.

b) Como a densidade de carga é constante, haverá uma solução eletrostática – que vamos desprezar, pois estamos interessados nos campos elétricos e magnéticos dinâmicos que aparecem nesse problema. Esses campos dinâmicos são, portanto, gerados exclusivamente pelo potencial-vetor $\vec{A}(t,\vec{x})$, cuja solução exata é dada por:

$$\vec{A}(t,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{J}(t' = t_R, \vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \ ,$$

onde $t_R = t - |\vec{x} - \vec{x}\,'|/c$ é o tempo retardado.

Usando coordenadas cilíndricas, mostre que podemos expressar $\vec{A}$ como:

$$\vec{A}(t,z) = \hat{x}\, \frac{\mu_0 J_0}{2} e^{-i\omega t} \int d\rho'\, \rho' \, \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2+z^2}}}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}}$$

c) Partindo da expressão acima obtenha o campo magnético, cuja única componente é: $\vec{B}(t,z) = B_y \hat{y} = \partial A_x/\partial z$. Preste atenção aos casos em que $z > 0$ e em que $z < 0$.

d) Agora use a expressão encontrada no item (c) para obter diretamente o campo elétrico, $\vec{E}(t,z) = -\partial A_x/\partial t$.

e) Finalmente, mostre que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ correspondem a uma onda plana, polarizada linearmente, que se propaga com velocidade c na direção de $|z|$ crescente – ou seja, no sentido $+\hat{z}$ na região $z > 0$ e no sentido $-\hat{z}$ na região $z < 0$.

4.9 – Frequentemente é útil escrever uma onda plana monocromática usando a fórmula de Euler, e tomando a parte real dessa onda:

$$\vec{E} = Re\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)}\right] \equiv Re\left[\tilde{E}\right] \ , \qquad \vec{B} \equiv Re\left[\tilde{B}\right] = Re\left[\frac{1}{c}\hat{k} \times \tilde{E}\right] \ .$$

Mostre que podemos escrever a *média temporal* da densidade de energia do campo eletromagnético em termos desses campos complexos, como:

$$\langle u_{EM} \rangle_t = \frac{1}{4} Re \left[\varepsilon_0 \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \tilde{B} \cdot \tilde{B}^* \right] .$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Similarmente, mostre que a média temporal do vetor de Poyting é dada por:

$$\langle \vec{S}_P \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} Re \left[\tilde{E} \times \tilde{B}^* \right] .$$

4.10 – Analise o caso da polarização *perpendicular* ao plano de incidência (em sala de aula vimos o caso de polarização *paralela* ao plano de incidência – ou seja, quando a direção do campo elétrico é paralela ao plano de incidência). Imponha as condições de contorno e obtenha as equações de Fresnel para o campo elétrico refletido e transmitido. Esboce os gráficos de $\frac{E_R}{E_I}$ e $\frac{E_R}{E_I}$ em função do ângulo de incidência para o caso em que $n_2/n_1 = 1.5$. Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão, e mostre que a soma dos dois é 1.

4.11 – **[Problema-desafio – valendo 5 pontos extras nesta lista!]**
A Física do arco-íris.

Um feixe de luz vermelha não-polarizada (tal como você espera do Sol num fim de tarde), de intensidade I_0, incide no ponto A de uma gota de água esférica (veja a figura na página seguinte). Em A, parte da luz é refletida, e parte é transmitida (refratada) para dentro da gota. A luz refratada atinge o ponto B onde, novamente, parte é refletida e parte é refratada. A luz que foi refletida no ponto B então atinge o ponto C, onde novamente, parte é refletida, parte é refratada. Utilizando um índice de refração da água para luz vermelha de $n_v = 1.331$, responda:

a) Usando os dados da figura acima, qual é o ângulo α?

b) Qual a intensidade de luz que é refratada para dentro da gota em A? Utilize para isso os resultados para os índices de refração obtidos no caso de polarização paralela ao plano de incidência (feitos em sala de aula) e perpendicular ao plano de incidência (Problema 6.2, acima), lembrando que luz não-polarizada é, efetivamente, composta de 50% de luz em cada um desses dois estados de polarização (perpendicular e paralela ao plano de incidência).

c) Para qual valor do ângulo α a luz refletida em A seria totalmente polarizada na direção paralela ao plano de incidência?

d) Qual é o estado de polarização dominante da luz que emerge do ponto B?

e) Assuma que o mesmo feixe de luz incidente que você considerou acima contenha, além da luz vermelha, um pouco de luz azul. Qual seria a trajetória da luz azul? (O índice de refração da luz azul na água é $n_a = 1.343$.)

f) Se você observar um arco-íris no céu, vai notar que a faixa azul/violeta está abaixo da faixa avermelhada. Use os seus cálculos e a figura deste problema para explicar por quê a luz acaba separada dessa maneira.

g) Agora considere um feixe de luz que experimenta não dois, mas *três* reflexões internas dentro da gota d'água (veja as gotas mais acima na figura deste problema). De que modo as faixas de luz azul e vermelha estarão organizadas?