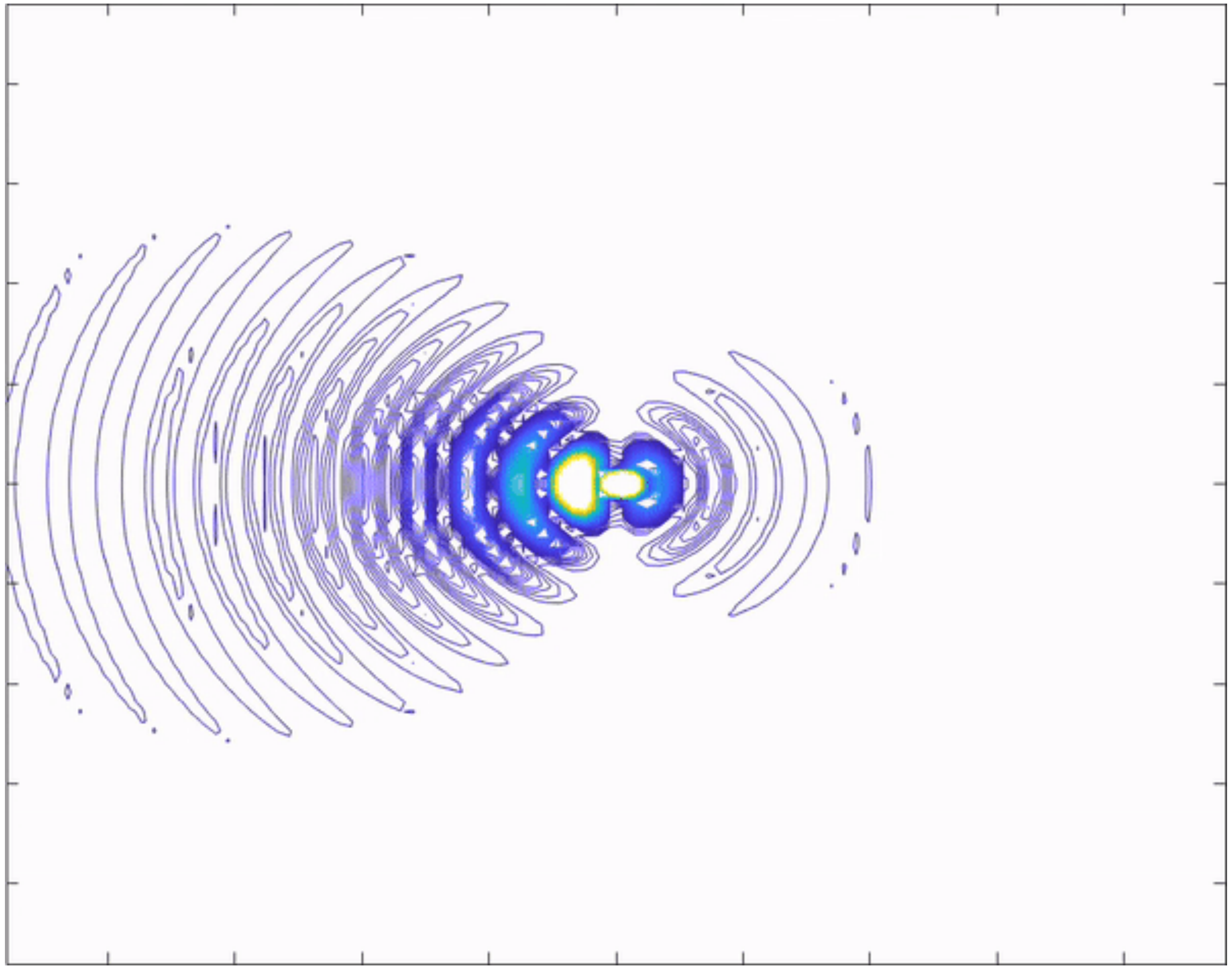


Eletrodinâmica: Teorema de Poynting e radiação eletromagnética

⚡ Teorema de Poynting: aplicações

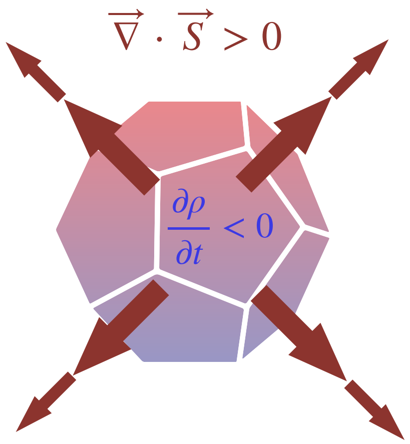
⚡ Radiação eletromagnética: preâmbulos

Teorema de Poynting e energia

- Na aula passada vimos que o fluxo de energia é dado pelo ***Vetor de Poynting***:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- Esse vetor entra no Teorema de Poynting, que é nada menos que a ***equação da continuidade para a energia***:

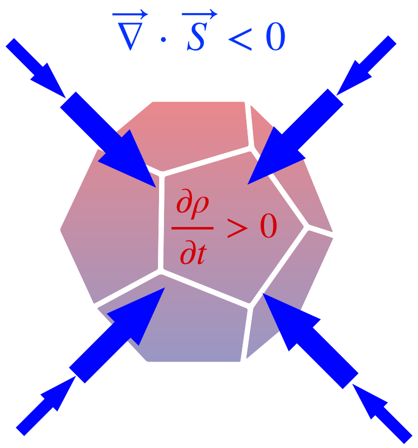


$$\frac{\partial \rho_{Tot}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

- Isso significa que o vetor de Poynting é uma ***corrente de energia:***

➡ Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} > 0$ num certo volume, isso significa que a energia está ***saindo*** desse volume (temos ***fontes*** de $\vec{S}$). A contrapartida dentro do volume é que a ***energia diminui***.

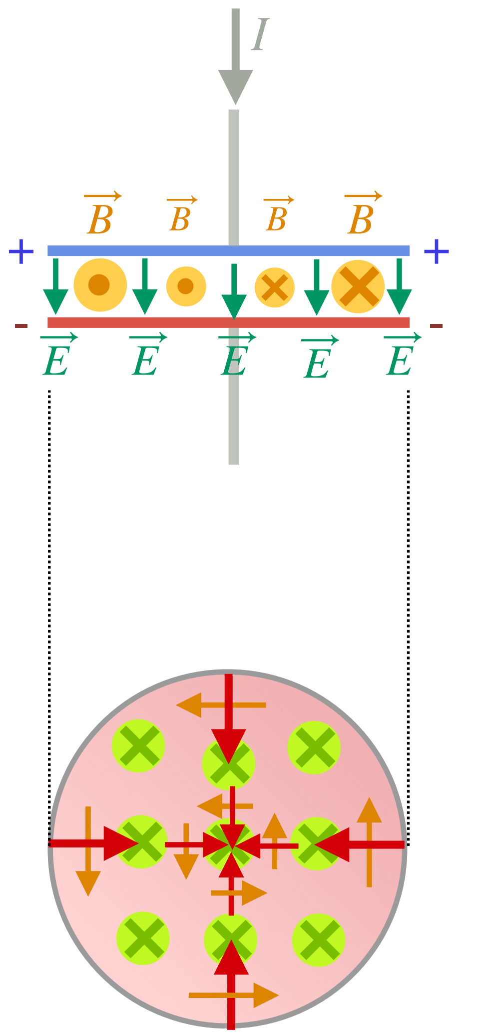
➡ Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} < 0$, então temos "***sumidouros***" de energia dentro do volume, e portanto a ***energia*** naquele volume ***aumenta***.



- O Teorema de Poynting garante a ***conservação de energia*** entre o campo eletromagnético e o sistema físico onde agem as forças associadas àqueles campos! Uma expressão mais "intuitiva" seria:

$$\frac{\partial U_{Tot}(V)}{\partial t} = - \oint_{S(V)} d\vec{A} \cdot \vec{S}$$

Teorema de Poynting: aplicações



- Na aula passada vimos o exemplo de um capacitor sendo carregado com uma corrente constante. Naquele caso encontramos que:

$$\vec{E} = -\frac{I\,t}{\epsilon\,A}\hat{z}$$

$$\vec{H} = -\frac{I\,\rho}{2A}\hat{\varphi}$$

- O vetor de Poynting é dado por:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I^2 \rho t}{2\epsilon A^2}(-\hat{\rho})$$

Ou seja, o fluxo de energia é para dentro do sistema!

- Claro que, se o capacitor estiver sendo ***descarregado***, o fluxo se inverte, e a energia flui ***para fora*** do sistema.
- As densidade de energia do campo elétrico e do campo magnético são:

$$\rho_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{I^2 t^2}{2\epsilon A^2} \quad , \quad \text{o que está aumentando com o tempo}$$

$$\rho_B = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{\mu I^2 \rho^2}{8A^2} \quad , \quad \text{que fica constante com o tempo.}$$

- Note que esses resultados são exatamente aqueles que satisfazem o Teorema de Poynting:

$$\frac{\partial(\rho_E + \rho_B)}{\partial t} = \frac{I^2\,t}{\epsilon A^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho S_\rho\right) = -\frac{I^2\,t}{\epsilon A^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

Teorema de Poynting: aplicações

- Vamos agora considerar um outro exemplo, de um ***solenoide*** cuja ***corrente vai lentamente aumentando*** com o tempo.
- Dada uma corrente I num solenoide com N voltas e altura L, o campo magnético é dado por:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N I}{L} \hat{z}$$

- Aplicando a Lei de Faraday num circuito circular de raio ρ interno ao solenoide nos diz que o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N}{L} \dot{I} \rho \, \hat{\varphi}$$

- Portanto, o vetor de Poynting nesse caso é dado por:

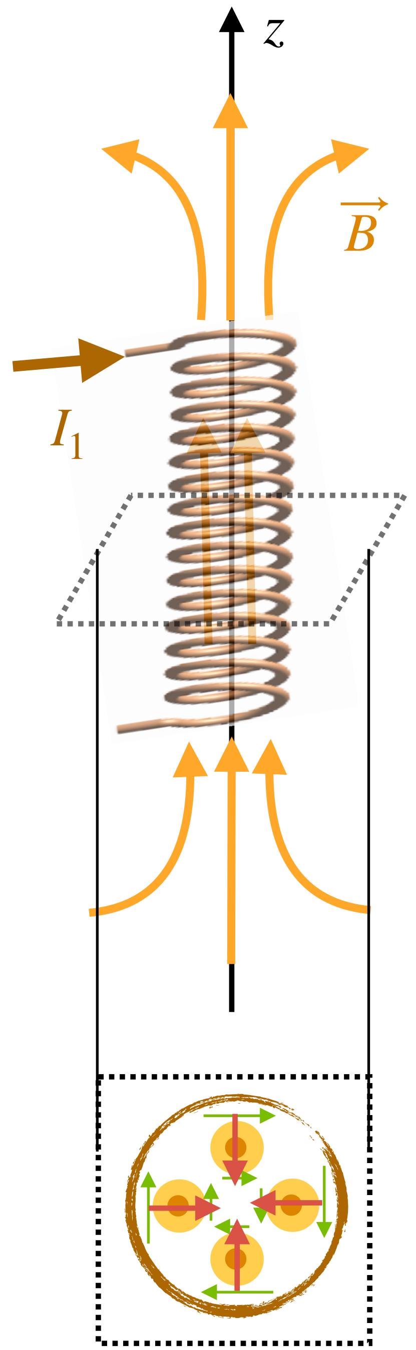
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{L^2} I \dot{I} \rho \, \hat{\rho}$$

- Vamos olhar para as densidades de energia do campo magnético e do campo elétrico:

$$\rho_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{L^2} I^2$$

$$\rho_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N}{L} \dot{I} \rho \right)^2$$

Portanto, se a corrente cresce de intensidade com o tempo de um modo aproximadamente linear, $I = \alpha \, t$, a densidade de energia no campo magnético cresce como $\sim t^2$, enquanto a densidade de energia do campo elétrico permanece constante.



Teorema de Poynting: aplicações

- Entretanto, agora algo um pouco diferente ocorre. Vamos tentar verificar o Teorema de Poynting/ equação da continuidade para a energia. Temos que:

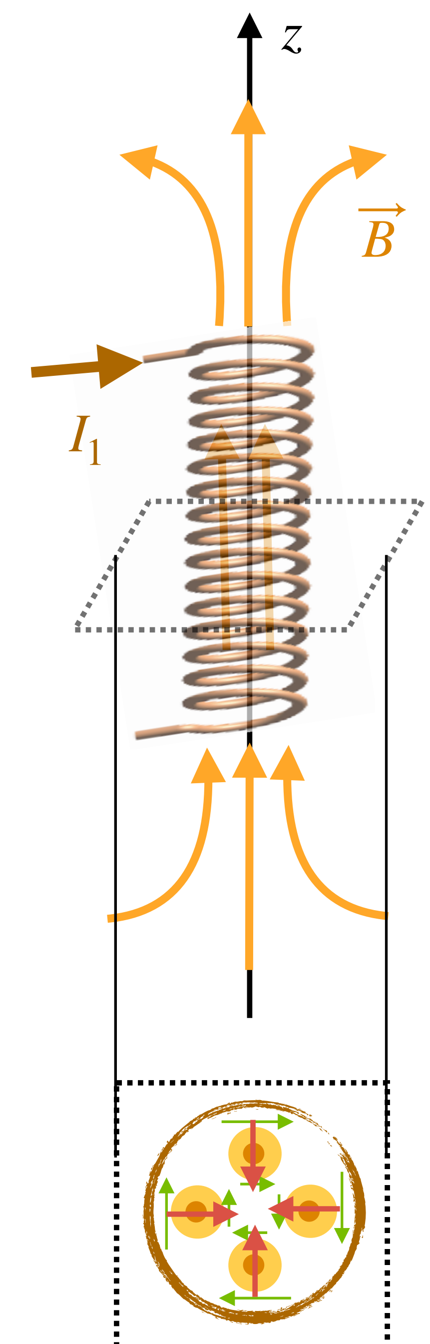
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_B = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2}{L^2}I^2\right) = \mu_0\frac{N^2}{L^2}\,I\,\dot{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_E = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{1}{2}\mu_0\frac{N}{L}\dot{I}\rho\right)^2\right] = \frac{1}{4c^2}\mu_0\frac{N^2}{L^2}\,\rho^2\,\dot{I}\,\ddot{I}$$

- Por outro lado, o divergente do Vetor de Poynting nos dá:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \vec{\nabla}\cdot\left[-\frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2}{L^2}\,I\,\dot{I}\,\rho\,\hat{\rho}\right] = -\,\mu_0\frac{N^2}{L^2}\,I\,\dot{I}$$

- Portanto, o "fluxo de energia" corresponde exatamente à mudança da energia do campo magnético, mas não inclui a parte do campo elétrico!
- Caso a corrente cresça de um modo linear, temos que $I = \alpha t$, $\dot{I} = \alpha$ e $\ddot{I} \to 0$, e a densidade do campo elétrico permanece constante — assim como a densidade do campo magnético fica constante no caso do capacitor.
- Porém, e se a corrente não muda de forma linear?? Como fica esse balanço de energia então??



Teorema de Poynting: aplicações

- Para responder a essa pergunta, primeiro é importante notar que a densidade de energia no campo elétrico, nesse caso, é ***muito menor*** que a densidade de energia no campo magnético:

$$\rho_B = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{L^2} I^2$$

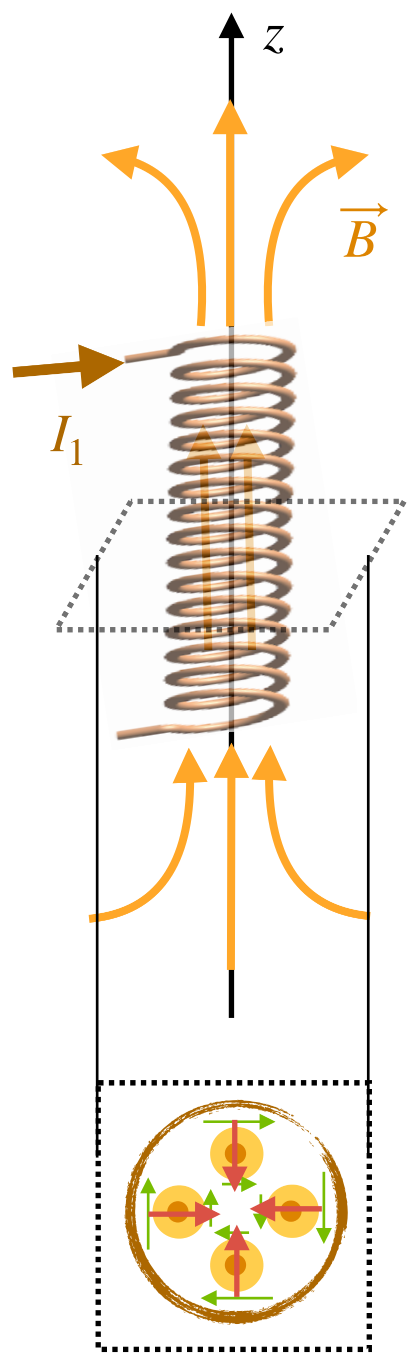
$$\rho_E = \frac{1}{8\,c^2}\mu_0 \frac{N^2}{L^2} \dot{I}^2 \rho^2$$

Se assumirmos que $I = I_0\, t/T$, onde T é uma escala caraterística de tempo, chegamos em:

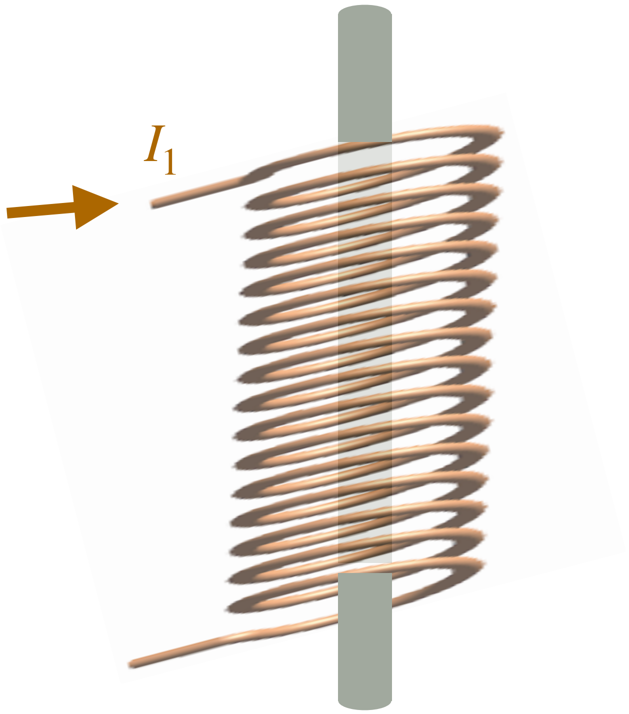
$$\rho_E = \frac{1}{4\,c^2}\frac{\rho^2}{t^2}\,\rho_B \quad \ll \quad \rho_B$$

- Note também que essa energia tem um pico logo que a corrente começa a aumentar, e depois ela cai rapidamente.

- Ou seja: essa energia corresponde ao "custo" para gerar o ***campo elétrico induzido***, que é "pago" logo no início, quando "ligamos" o circuito. Essa energia tem que ser compensada pela fonte da corrente I, que faz o que for necessário para manter um certo comportamento $I(t)$.



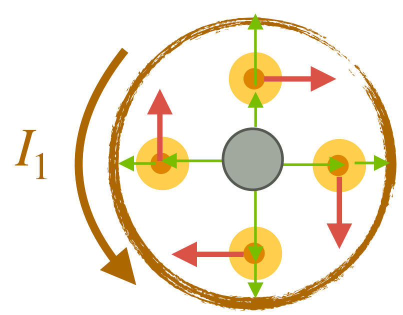
Teorema de Poynting: aplicações



- Além do balanço de energia, algo bastante interessante está acontecendo neste sistema. Suponha que dentro de um solenoide com ***corrente constante*** temos um cilindro coaxial, de raio a, feito de material isolante e com densidade superficial de cargas σ_0 .
- O campo magnético é o do solenoide com corrente constante, e o campo elétrico é o do cilindro carregado, ou seja:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{a}{\rho}\,\hat{\rho}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} I\,\hat{z}$$



- Note que agora nós temos um vetor de Poynting nesse sistema! De fato,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{a}{\rho}\frac{N}{L} I\,(-\hat{\varphi})$$

- Ou seja… parece que esse vetor de Poynting está circulando??
- Note também que $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$ — ou seja, não há fluxo para dentro ou para fora, ele apenas… circula…!
- De fato, vimos na aula passada que o vetor de Poynting não expressa apenas um fluxo de energia, mas ele também corresponde a uma ***densidade de momento*** dos campos eletromagnéticos. E neste caso, esse momento está circulando, o que nos levaria a pensar que se trata de algum tipo de ***momento angular***…!

Teorema de Poynting: aplicações

- De fato, é por aí mesmo. Vamos considerar o que aconteceria caso tentássemos alterar essa corrente. Nesse caso o campo magnético mudaria por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} \dot{I}\,\hat{z}$$

- A variação do campo magnético induz uma circulação do campo elétrico via Lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{N}{L} \dot{I}\,\hat{z}$$

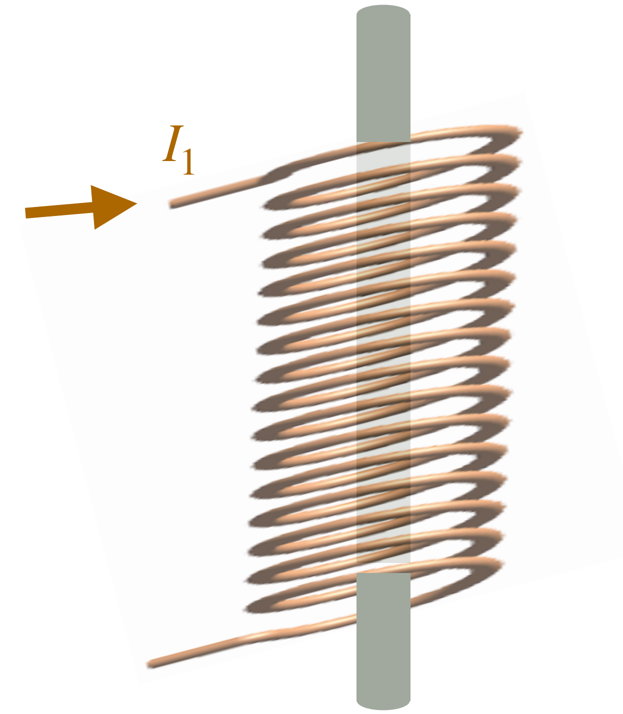
o que portanto gera um campo elétrico induzido na direção $\hat{\varphi}$:

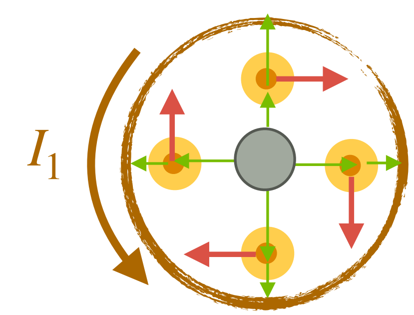
$$\vec{E}_{ind} = -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N}{L} \dot{I} \rho \hat{\varphi}$$

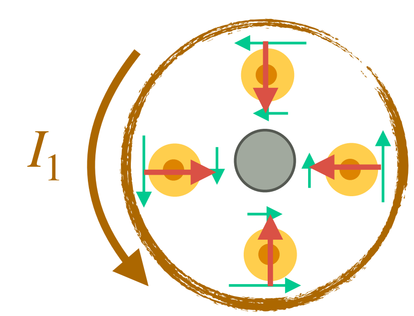
- Considere o aumento do campo magnético num intervalo de tempo Δt, $\Delta \vec{B} = \mu_0 (N/L) \dot{I}\,\Delta t\,\hat{z}$, e o campo elétrico induzido por esse aumento, dado acima. Temos então que a transferência de energia associada com isso é dada por:

$$\Delta \vec{S} = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{L^2} I \dot{I} \Delta t (-\hat{\rho})$$

- Combinando as duas componentes do vetor de Poynting, vemos que há uma transferência de energia do "modo ***circulante***", e com uma componente (pequena) para ***dentro*** do solenoide. (De fato, como o cilindro está carregado, se ele puder girar, ele vai girar!)
- Ou seja, o campo magnético possui um certo ***momento angular***, que pode ser convertido em momento angular do cilindro. E assim como um sistema mecânico em rotação possui energia, o momento angular do campo eletromagnético também corresponde a uma certa quantidade de energia!







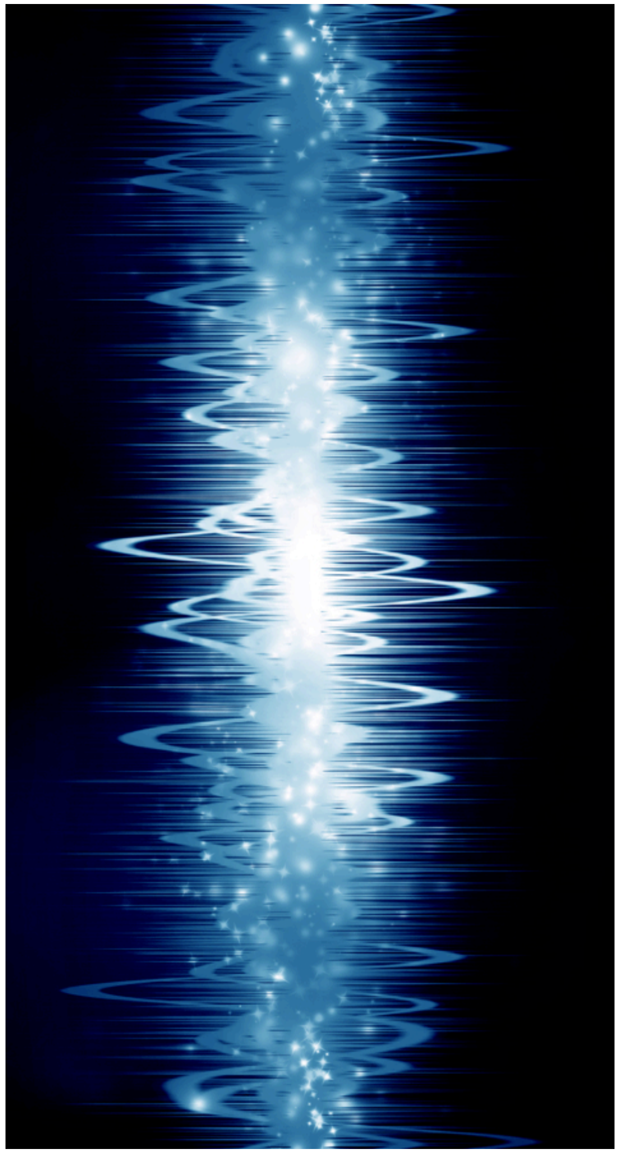
Radiação eletromagnética: preâmbulo

- Uma das consequências mais fundamentais que saem das Equações de Maxwell é o fato de que elas levam a uma equação de onda para os campos eletromagnéticos.
- Ou seja, no vácuo (ausência de cargas e correntes) os campos elétrico e magnético podem se propagar livremente, segundo equações tais como:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \qquad \text{(no vácuo)}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0 \qquad \text{(no vácuo)}$$

- Isso significa que, no vácuo, esses campos se propagam com uma velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.
- Em alguns livros-texto, nesse momento se discute a natureza dessa propagação livre, as propriedades dessas ondas eletromagnéticas (sua polarização), e o que acontece quando uma onda atinge um meio tal como um condutor ou dielétrico, levando a efeitos de ótica tais como a refração.
- Porém, um problema básico que ocorre neste momento é: como essas ondas se distinguem dos campos elétricos e magnéticos que encontramos no estudo da eletrostática e da magnetostática?
- Em particular, veremos que, enquanto os campos elétricos e magnéticos de cargas estáticas e correntes estacionárias decaem como $\sim 1/r^2$ ou mais rápido com a distância às fontes, os campos associados às ondas eletromagnéticos (também chamados de ***campos de radiação***) decaem ***mais devagar***, como $\sim 1/r$.
- Além disso, os ***campos de radiação*** efetivamente se ***descolam das fontes***, e passam a se propagar de um modo independente dessas fontes: eles ***não estão mais "amarrados" às cargas e correntes***!
- Os campos de radiação adquirem, portanto, uma ***natureza própria***: a luz existe por si própria!
- Mas em última análise, mesmo esses campos de radiação têm que emergir de uma configuração de cargas e correntes. Como ocorre essa ***geração de radiação eletromagnética***?
- Esse será o tema que vamos discutir nas próximas aulas — e, como veremos, para que haja radiação é fundamental que ocorra a ***aceleração de cargas***, ou a ***variação de correntes***.



Radiação eletromagnética: preâmbulo

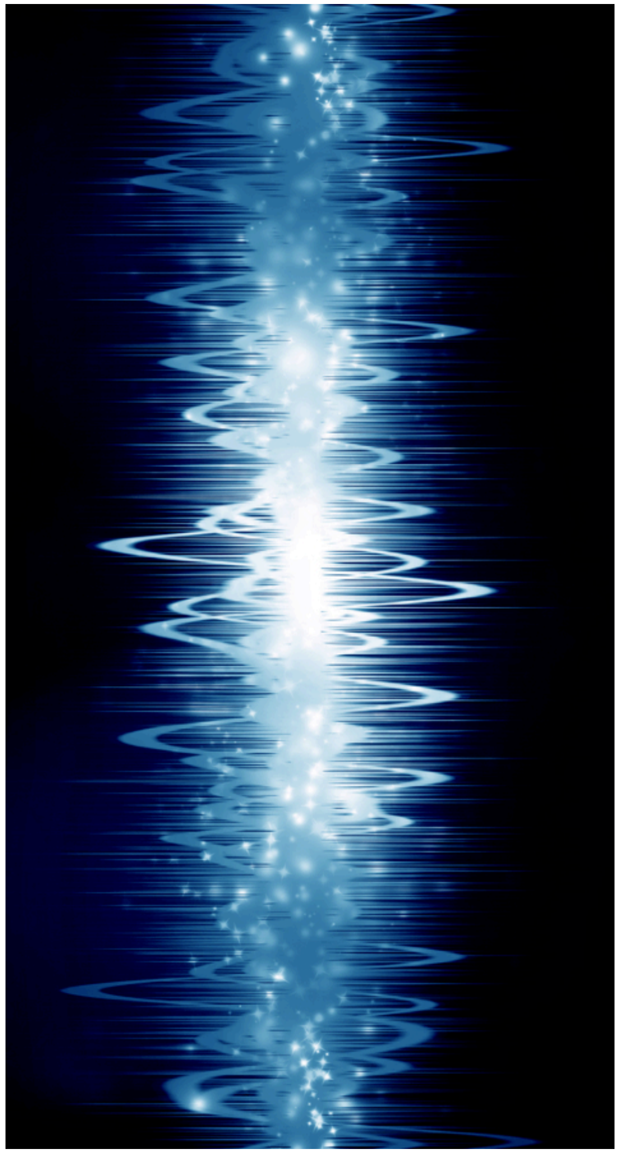
- Vamos retornar às Equações de Maxwell, e por simplicidade vamos assumir que estamos no vácuo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$ (Lei de Gauss para o campo elétrico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (Lei de Gauss para o campo magnético)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$ (Lei de Ampère; $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (Lei de Faraday)



- Os campos podem ser também escritos em termos dos ***potenciais eletromagnéticos***:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Escolhendo o calibre de Lorentz, no qual:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, vimos numa das nossas aulas passadas que chegamos às equações para os potenciais:

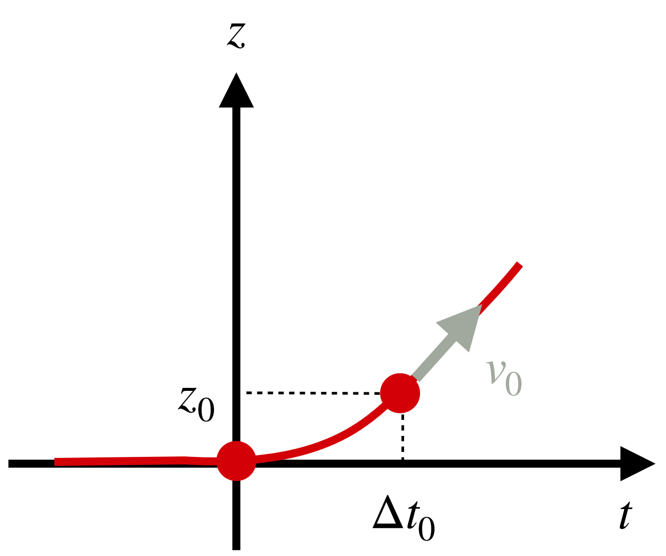
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

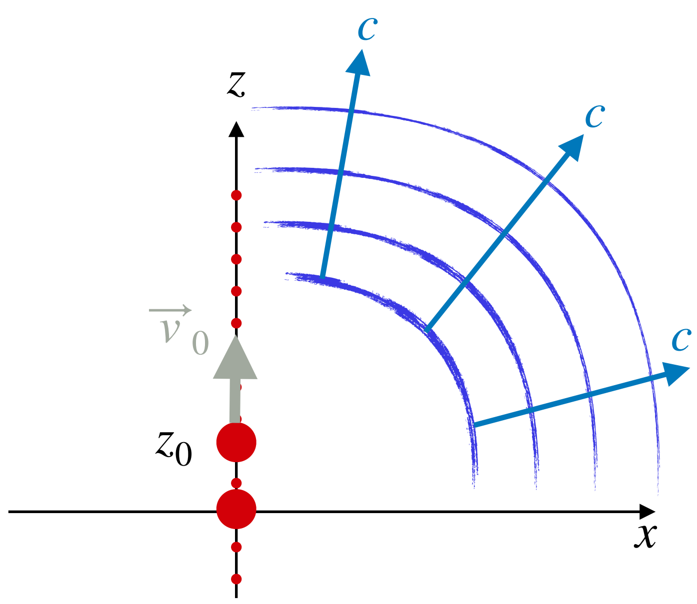
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \Box \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

onde $\Box = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, o ***D'Alembertiano***, é o operador da ***Equação de Onda***.

Radiação eletromagnética: preâmbulo

- Antes de atacar a equação de onda com fontes e encontrar de que modo o movimento de cargas elétricas gera radiação eletromagnética, é interessante estudar um modelo simples, uma situação ideal onde podemos ver como os campos de radiação emergem da dinâmica dessas cargas.
- O fato fundamental que vamos usar nesse exemplo é que, pela equação de onda, ***os campos se propagam a uma velocidade*** c .
- Vamos considerar uma carga pontual (q) que se move ao longo do eixo z . Vamos supor que essa carga está em repouso até um instante $t = 0$, quando ela começa a se mover na direção $+z$, com uma aceleração $\vec{a} = a_0 \hat{z}$, como mostrado na figura ao lado.
- Depois de um intervalo de tempo muito curto, Δt_0 , a aceleração se torna nula, e a partícula passa a se mover com velocidade $\vec{v}_0 = a_0 \Delta t_0 \hat{z}$. Ou seja, quando a carga está em $z_0 = a_0^2 \Delta t_0^2 / 2$, ela passa a ter uma velocidade constante .



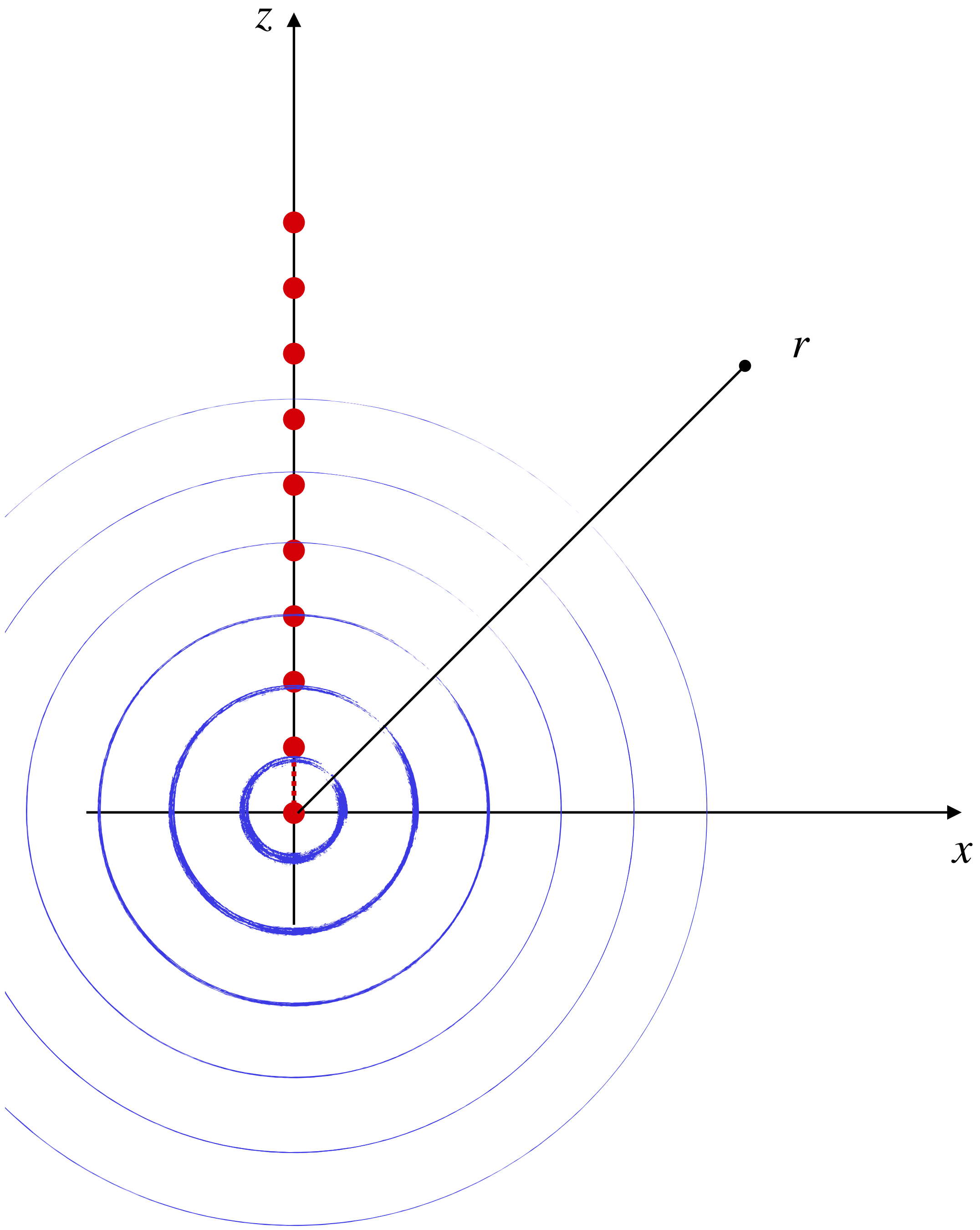


Radiação eletromagnética: preâmbulo

- Vamos primeiro considerar os campos medidos por um observador que está muito distante da origem, $r \gg ct$. Como os campos se propagam à velocidade c, para esse observador a carga continua exatamente parada na origem, e portanto o campo é apenas o campo elétrico de uma carga pontual em repouso:

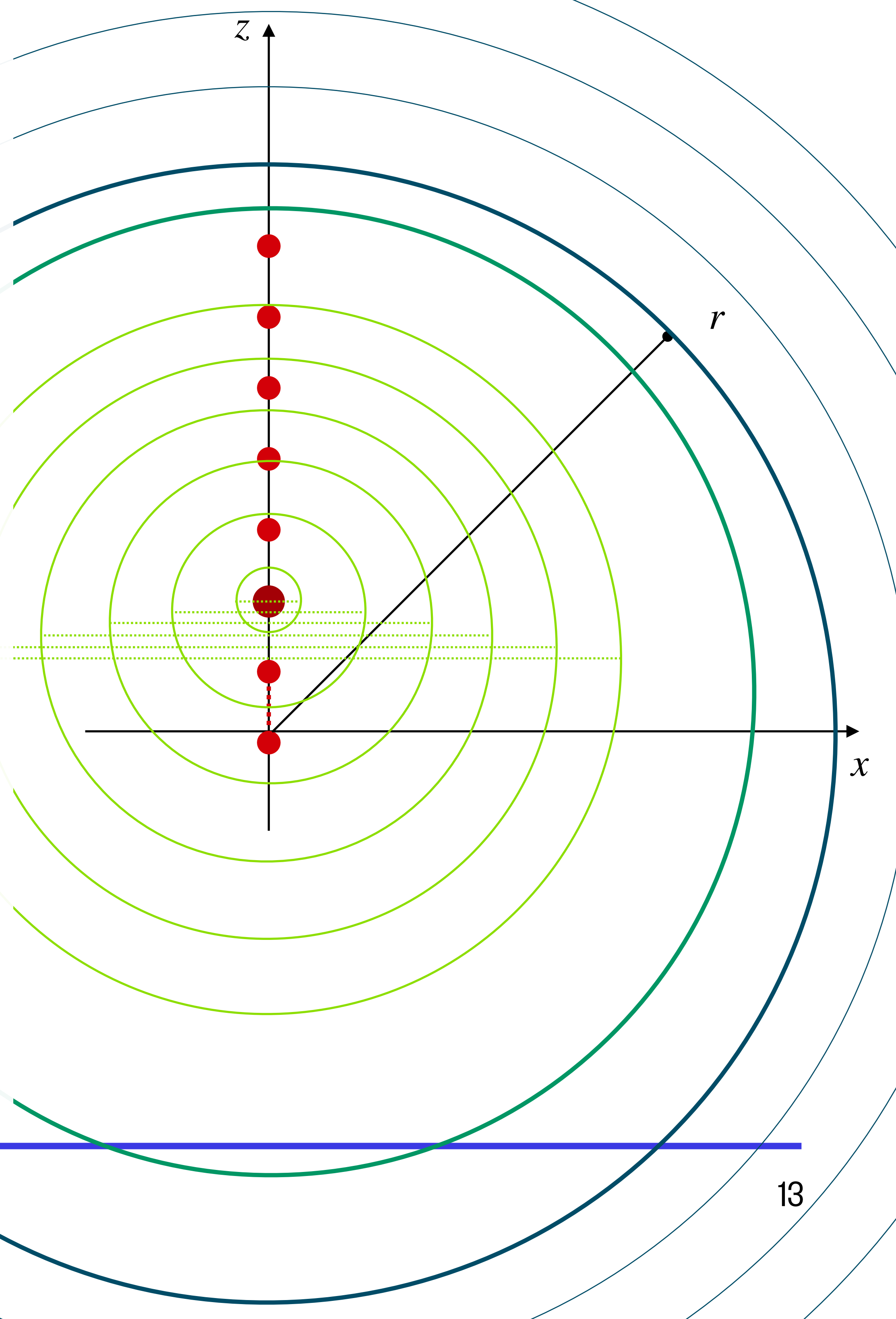
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Mas à medida que a carga se move, o "centro" de onde emerge o campo elétrico, se move da origem, ao longo do eixo z.
- Para um observador mais próximo da origem, a uma distância $r < ct$, que vê a carga se movendo com velocidade constante $\vec{v}_0$, mede um campo elétrico que é essencialmente radial, mas centralizado na posição em que a carga estava num instante $t^* = r/c$, ou seja, $z^* = v_0 t^* = v_0 r/c$.



Radiação eletromagnética: preâmbulo

- Vamos primeiro então desenhar o campo elétrico num instante $t \gg \Delta t_0$, em vários pontos do espaço.
- Muito longe $r > ct$, o campo é ***radial***, e centrado na origem.
- Um pouco mais perto, o campo é radial com relação a um ponto ao longo do eixo z onde a carga estava há um intervalo de tempo $\Delta t = r/c$ anterior, ou seja, em $t - r/c$.
- Mas existe um intervalo, imediatamente dentro da região $r = ct,$ que carrega o sinal da aceleração da carga .
- Vamos então analisar o que está acontecendo com as linhas de campo elétrico nessa região de transição.



Radiação eletromagnética: preâmbulo

- O campo elétrico na região "fora" e "dentro" dessa casca esférica para a qual a carga ainda parece estar na origem tem que ser contínuo.
- Para resolver a geometria associada ao campo elétrico vamos analisar a geometria relacionada à posição da carga.
- Num instante $t \gg \Delta t_0$, a carga está numa posição $z \simeq v_0 t = a_0 \Delta t_0 t$. Portanto, a distância L entre os dois "raios" mostrados na figura é dada por:

$$L = a_0 \Delta t_0 t \, \sin\theta$$

- Agora podemos usar semelhança de triângulos:

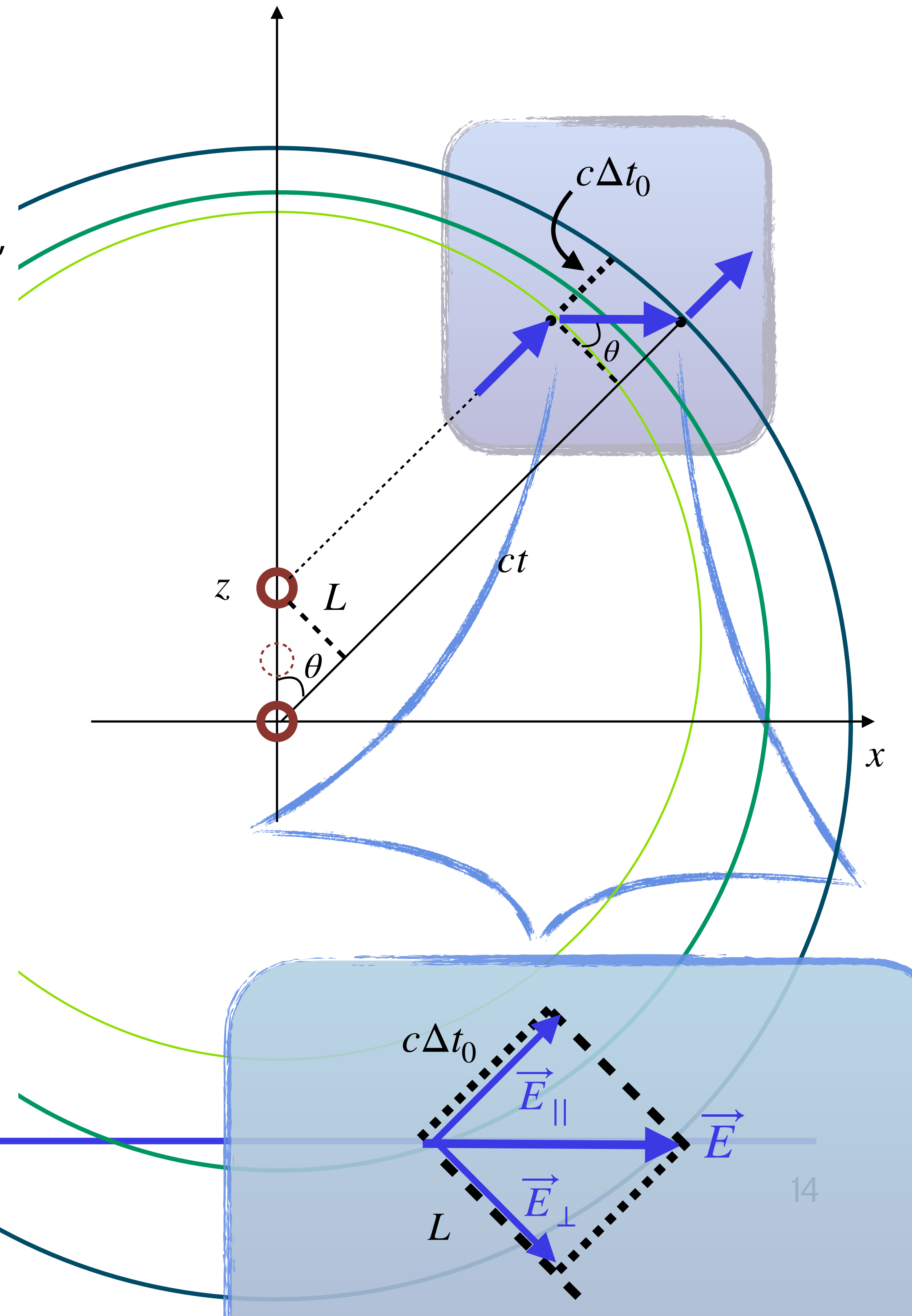
$$\frac{E_\perp}{E_{||}} = \frac{L}{c\Delta t_0} = \frac{a_0 \Delta t_0 t \, \sin\theta}{c \Delta t_0} = \frac{a_0}{c} t \sin\theta$$, e usando que $r = ct$ temos:

$$\Rightarrow \quad E_\perp = = \frac{a_0}{c} t \sin\theta \, E_{||} = \frac{a_0}{c^2} r \sin\theta \, E_{||}$$

- Mas a componente paralela é exatamente aquela do campo radial,

$$E_{||} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$, e portanto obtemos que:

$$\Rightarrow \quad E_\perp = \frac{q \, a_0}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{r} \sin\theta \;\; !!!$$



Radiação eletromagnética: preâmbulo

- Acabamos de obter, de um modo um tanto rudimentar, alguns resultados importantíssimos, que estão contidos na expressão para a componente tangencial (perpendicular) do campo elétrico:

$$E_\perp = \frac{q}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{r}\, a_0 \sin\theta = \frac{q}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{r}\, a_\perp$$

➡ Antes de mais nada, note que essa componente tangencial decai como $E \sim 1/r$, e não como é habitual na eletrostática, $E \sim 1/r^2$;

➡ Em segundo lugar, esse campo que cai como $\sim 1/r$ é proporcional à componente "perpendicular" (tangencial) da aceleração em cada ponto.

- Note que esse "impulso", essa região de campo $E_\perp$, tem uma certa duração, que é o tempo durante o qual a carga está acelerada.
- Vou deixar como exercício para vocês calcularem o campo magnético nesse sistema. Vocês devem encontrar que, dentro dessa região onde a informação da carga acelerada se propaga é:

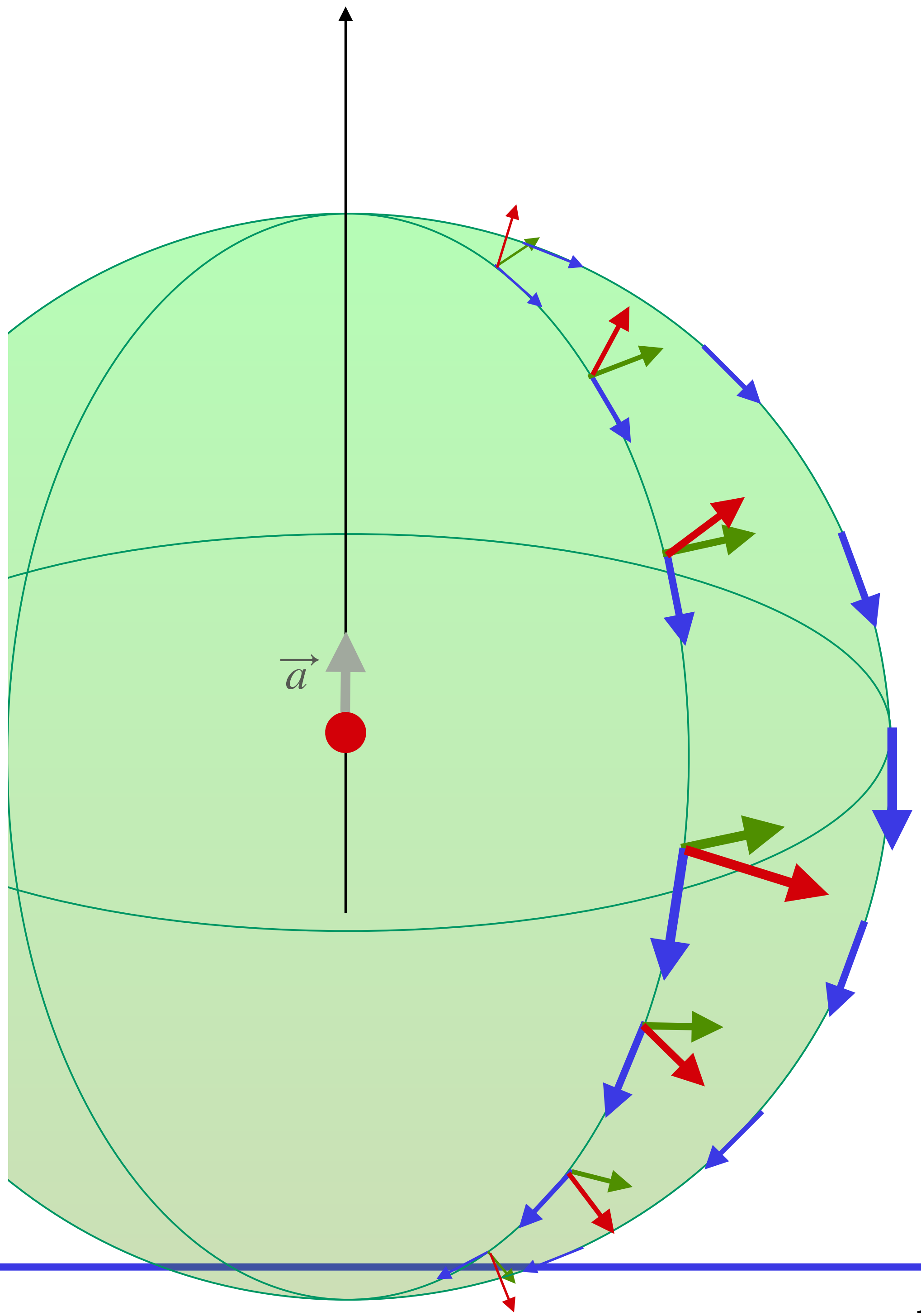
$\vec{B} \to \vec{B}_\perp$ é perpendicular a $\hat{r}$

$\vec{B} \to \vec{B}_\perp$ é perpendicular a $\vec{E}_\perp$

De fato, $B_\perp \sim \dfrac{a_\perp}{c^2}\dfrac{1}{r}$

- Isso significa que o ***vetor de Poynting*** é dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp \;\sim\; \sin^2\theta\, \frac{\hat{r}}{r^2}$$



Radiação eletromagnética: fluxo de energia

- Esse último resultado é ainda mais importante:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp \sim \sin^2\theta \, \frac{\hat{r}}{r^2}$$

- Agora, lembre-se que o período durante o qual a carga esteve acelerada era de Δt_0. Isso significa que esse vetor de Poynting só existe durante um período Δt_0: antes e depois, não há campos "perpendiculares".

- Vamos calcular a potência que atravessa uma casca esférica de raio r, ou seja:

$$P_r = \oint d\vec{A} \cdot \vec{S} = \oint (r^2 \sin\theta d\theta \, d\varphi \, \hat{r}) \cdot \vec{S}$$

Fazendo $\vec{S} = S_0 \sin^2\theta \, \frac{\hat{r}}{r^2}$ temos:

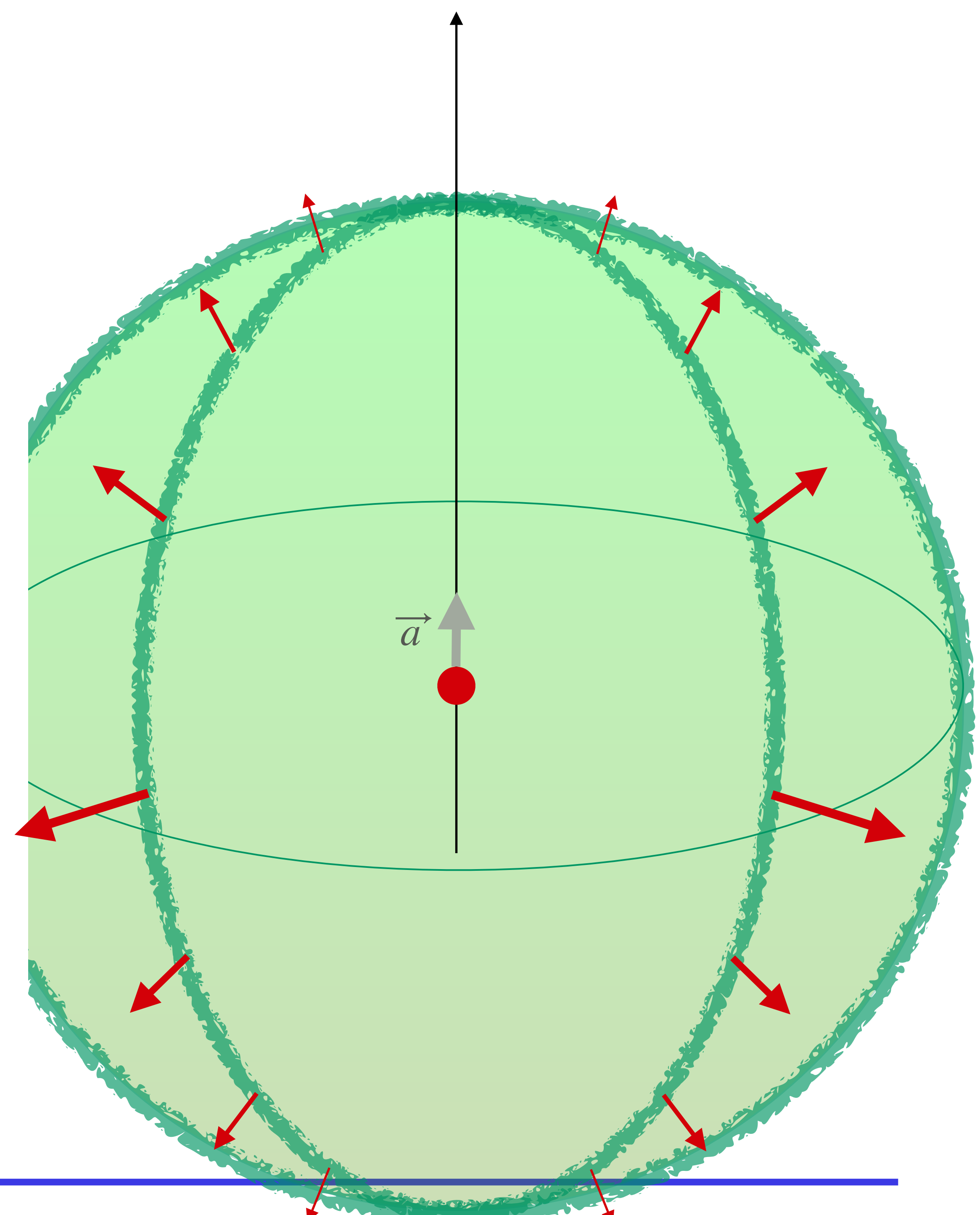
$$P_r = S_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = 2\pi \, S_0 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, (1 - \cos^2\theta)$$

$$= 2\pi \, S_0 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} S_0$$

- Como essa potência é a variação de energia, e o pulso dura um tempo Δt_0, a energia total que cruza essa casca esférica de raio r é dada por:

$$\Delta U = P_r \, \Delta t_0 = \frac{8\pi}{3} S_0 \, \Delta t_0$$

Em outras palavras: a ***energia que cruza uma casca esférica de raio r não depende do raio dessa casca esférica***! Essa energia é levada da carga acelerada para o infinito — ou seja, os campos "perpendiculares" se ***desprenderam da carga*** por completo, e se propagam livremente em todas as direções, para longe da carga, carregando uma quantidade ***fixa*** (e ***finita***) de energia.



Próxima aula:

- Radiação eletromagnética: solução exata
- Eletromagnetismo, relatividade e causalidade

- Revisar Cálculo IV (Teorema de Cauchy/resíduos)
- Leitura complementar: Jackson, Caps. 5-6-7