

# Sustainable Plans

Mauro Rodrigues (USP)

2020

# Introdução

- Comprometimento: governo anuncia uma sequência de impostos, e não muda ex-post
- Mas há incentivos a renegar o anúncio
  - ▶ Uma vez que o capital foi acumulado, sua oferta é inelástica
  - ▶ Aumentar a taxação sobre o capital levaria a ganhos de eficiência, na medida em que permite reduzir impostos distorcivos em outras margens
- Agentes antecipam eventual mudança e acumulam menos capital
  - ▶ Base do imposto sobre o capital encolhe, sendo necessário taxar outras margens, potencialmente trazendo mais distorção
- Inconsistência temporal: ex-ante uma decisão é ótima, mas ex-post não necessariamente
  - ▶ Antecipação dos agentes à mudança pode gerar ineficiência
  - ▶ Ganhos associados a comprometimento
- Referência:
  - ▶ Chari, V. V. and Kehoe, P. J. (1990). "Sustainable Plans." *Journal of Political Economy* 98: 783-802.

# Modelo

- Tempo discreto:  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 1]$
- Função de produção linear

$$Y = F(k, n) = Rk + n$$

- ▶ Produto marginal do capital =  $R > 1$
- ▶ Produto marginal do trabalho = 1
- Firmas atuam em concorrência perfeita
  - ▶  $r_t = R$
  - ▶  $w_t = 1$

# Timing dentro do período

Em cada período  $t$  há dois estágios

- 1 Consumidores recebem  $\omega$  unidades do bem de consumo como dotação, que podem ser divididas entre consumo ( $c_{1t}$ ) e poupança/acumulação de capital ( $k_t$ )

$$c_{1t} + k_t = \omega$$

- 2 Agentes trabalham, recebem renda do capital e do trabalho (líquida de impostos), e consomem ( $c_{2t}$ )
- Renda líquida de impostos =  $(1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$$

- $\tau_{nt}, \tau_{kt} \in [0, 1]$

# Observação

- Investimento realizado no primeiro estágio e gera capital para ser usado no segundo estágio
- Capital deprecia completamente entre períodos
- Não há variável de estado
- Sucessão de problemas estáticos
  - ▶ Todo período  $t$  consumidores recebem dotação  $\omega$  e governo tem que financiar seus gastos constantes

# Preferências e restrições

- Utilidade ao longo da vida:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{1t} + c_{2t}, \overbrace{l_t}^{1-n_t})$$

- ▶  $c_{1t}$  e  $c_{2t}$  são substitutos perfeitos
- Governo estabelece  $\{\tau_{kt}, \tau_{nt}\}$  de modo a financiar gastos  $g$  (constante) no segundo estágio de cada período  $t$

$$\tau_{nt}n_t + \tau_{kt}Rk_t = g$$

- ▶ Não há dívida/ativos do setor público
- Suponha:

$$g > (R - 1)\omega$$

# Comprometimento

Governo benevolente: estabelece impostos de modo a maximizar bem estar do consumidor representativo

Dois arranjos:

- 1 **Comprometimento:** governo anuncia crivelmente  $\{\tau_{kt}, \tau_{nt}\}$  em  $t = 0$ . Dados estes impostos, consumidores fazem suas escolhas
- 2 **Não comprometimento:** governo e consumidores fazem suas escolhas sequencialmente:
  - ▶ Decisões dos agentes dependem de suas expectativas a respeito das ações futuras do governo

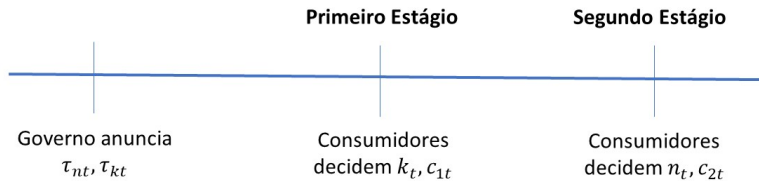
# Problema estático

- Considere decisões ocorrendo em apenas um período  $t$
- **Comprometimento:**
  - ▶ No início de  $t$ , governo anuncia crivelmente alíquotas  $\tau_{kt}$  e  $\tau_{nt}$
  - ▶ Dado o anúncio, consumidores fazem suas escolhas (primeiro e segundo estágio ocorrem)
- Como há credibilidade nesse caso, consumidores tomam decisões com base no anúncio do governo
  - ▶ Governo implementa impostos de acordo com o anúncio



# Comprometimento

Período  $t$



# Comprometimento

- Resolvendo do fim para o começo (“backward induction”)
- Problema do consumidor no segundo estágio
  - ▶ Escolher  $c_{2t}, n_t$
  - ▶ Tomando como dados  $c_{1t}, k_t, \tau_{nt}, \tau_{kt}$  (definidos anteriormente a este estágio)

$$\max_{c_{2t}, n_t} u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$$

$c_{1t}, k_t, \tau_{nt}, \tau_{kt}$  dados

## Segundo estágio

- Reescrevendo:

$$\max_{n_t} u(c_{1t} + (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t, 1 - n_t)$$

- Condição de primeira ordem (com relação a  $n_t$ ):

$$u_{ct}(1 - \tau_{nt}) - u_{\ell t} = 0$$

- Ou:

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt} \tag{1}$$

# Primeiro estágio

- Escolher  $c_{1t}, k_t$ 
  - ▶ Dados  $\tau_{kt}, \tau_{nt}$  (anúncio crível do governo)
  - ▶ Dado que  $c_{2t}, n_t$  serão escolhidos de maneira ótima (eq. (1) + restrição orçamentária do 2o estágio)

$$\max_{c_{1t}, k_t} u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{1t} + k_t = \omega$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{c t}} = 1 - \tau_{nt}$$

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$$

## Primeiro estágio

- Substituindo as restrições orçamentárias

$$\max_{c_{1t}, k_t} u \left[ \overbrace{\omega - k_t + (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t}^{\omega + (1 - \tau_{nt})n_t + [(1 - \tau_{kt})R - 1]k_t}, 1 - n_t \right]$$

s.t.

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{c t}} = 1 - \tau_{nt}$$

- Dado que a função objetivo é linear em  $k_t$ , a escolha ótima é tal que:

$$k_t = 0, \text{ se } (1 - \tau_{kt})R < 1 \Leftrightarrow \tau_{kt} > (R - 1)/R$$

$$k_t = \omega, \text{ se } (1 - \tau_{kt})R \geq 1 \Leftrightarrow \tau_{kt} \leq (R - 1)/R$$

- Escolhas ótimas (nos dois estágios) como função de impostos:  
 $c_{1t} = c_1(\tau_{nt}, \tau_{kt}), c_{2t} = c_2(\tau_{nt}, \tau_{kt}), k_t = k(\tau_{nt}, \tau_{kt}), n_t = n(\tau_{nt}, \tau_{kt})$

# Problema do governo

- Maximizar  $u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$ :
  - ▶ Dadas as escolhas ótimas dos agentes (que são afetadas por impostos)
  - ▶ Dada a restrição orçamentária do governo
- Em outras palavras:

$$\max_{c_{1t}, k_t} u(c_1(\tau_{nt}, \tau_{kt}) + c_2(\tau_{nt}, \tau_{kt}), 1 - n(\tau_{nt}, \tau_{kt}))$$

s.t.

$$\tau_{nt} n(\tau_{nt}, \tau_{kt}) + \tau_{kt} Rk(\tau_{nt}, \tau_{kt}) = g$$

# Problema do governo

- Note que a escolha de capital não varia para  $0 < \tau_{kt} \leq (R - 1)/R$ 
  - ▶ Não há distorções associadas a variar  $\tau_{kt}$  nesse intervalo
- Já variações em  $\tau_{nt}$  sempre causam distorções (veja eq. (1))
- Aumentar  $\tau_{kt}$  além de  $(R - 1)/R$  faz com que o capital vá para zero
  - ▶ Governo precisaria financiar todo o gasto com imposto sobre o trabalho, gerando muita distorção
- Portanto, o imposto ótimo é:

$$\tau_{kt} = \frac{R - 1}{R}$$

- ▶ Arrecada-se o máximo possível dentro do intervalo inelástico de  $k_t$ , minimizando a distorção acarretada pela taxaço sobre o trabalho

## Problema do governo

- Nesse caso,  $c_{1t} = 0$  e  $k_t = \omega$ . Além disso, da restrição orçamentária de 2o estágio e da restrição orçamentária do governo:

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \overbrace{(1 - \tau_{kt})R}^{1/R} \overbrace{k_t}^{\omega} = (1 - \tau_{nt})n_t + \omega$$
$$g = \tau_{nt}n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{(R-1)/R} \underbrace{R k_t}_{\omega} = \tau_{nt}n_t + (R-1)\omega$$

- Note que a hipótese de que  $g > (R-1)\omega$  faz com que seja necessário taxar trabalho para financiar os gastos



# Payoff de comprometimento

$\tau_{nt}$  é a solução do seguinte problema

$$\mathbb{W}^R = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \omega$$

$$g = \tau_{nt}n_t + (R - 1)\omega$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

# Não comprometimento

- Suponha agora que o governo não consiga se comprometer com o anúncio inicial
  - ▶ Estabelece impostos **após** a decisão de acumulação de capital dos agentes
- Nesse caso, é ótimo taxar o máximo possível o capital, dado que ele é inelástico
  - ▶ Isso vale mesmo para um governo benevolente, pois ele busca minimizar a distorção advinda do imposto sobre o trabalho
- Entretanto, os consumidores se antecipam a essa taxaço mais elevada, e não acumulam capital no primeiro estágio
  - ▶ Arrecadação de imposto sobre o capital é nula, forçando o governo a se financiar unicamente com impostos sobre o trabalho
  - ▶ Distorção é mais elevada

# Não comprometimento

Período  $t$

**Primeiro Estágio**

Consumidores  
decidem  $k_t, c_{1t}$

Governo  
estabelece  $\tau_{nt}, \tau_{kt}$

**Segundo Estágio**

Consumidores  
decidem  $n_t, c_{2t}$

# Não comprometimento

- Novamente usando backward induction
- **Segundo estágio** – similar ao caso anterior

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

- **Governo:** escolhe  $\tau_{nt}, \tau_{kt}$  de modo a maximizar  $u(c_{2t}, 1 - n_t)$ 
  - ▶ Dados  $k_t$  e  $c_{1t}$ , decididos anteriormente (no 1o estágio)
  - ▶ Escolhas ótimas dos agentes no 2o estágio (eq. (1) + restrição orçamentária do 2o estágio)

# Não comprometimento

- Da perspectiva do governo,  $k_t$  é dado
  - ▶ Imposto  $\tau_{kt}$  não distorce a acumulação de capital
  - ▶ Governo tenta minimizar a distorção do imposto sobre o trabalho
- Portanto, imposto ótimo é o mais elevado possível:

$$\tau_{kt} = 1$$

- **Primeiro estágio** – consumidores escolhem  $c_{1t}, k_t$  dadas
  - ▶ Dadas as escolhas ótimas do governo  $\tau_{nt}, \tau_{kt}$
  - ▶ Dadas as escolhas ótimas do consumidor no 2o estágio  $c_{2t}, n_t$

# Não comprometimento

- Dessa forma, consumidores no 1o estágio antecipam que:

$$\tau_{kt} = 1 > \frac{R-1}{R}$$

- Portanto escolhem  $k_t = 0$  e  $c_{1t} = \omega$ 
  - ▶ Imposto sobre capital produz arrecadação nula
  - ▶ Todo o gasto é financiado com imposto sobre a renda do trabalho
- Restrição orçamentária do governo e restrição orçamentária do consumidor no 2o estágio implicam:

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \overbrace{(1 - \tau_{kt})R}^{=0} \overbrace{k_t}^{=0} = (1 - \tau_{nt})n_t$$
$$g = \tau_{nt}n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{=1} R \underbrace{k_t}_{=0} = \tau_{nt}n_t$$

# Payoff de não comprometimento

$\tau_{nt}$  é a solução do seguinte problema

$$\mathbb{W}^N = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(\omega + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t$$

$$g = \tau_{nt}n_t$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{c t}} = 1 - \tau_{nt}$$

# Comparando payoffs

## Não comprometimento

$$\mathbb{W}^N(g) = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(\omega + (1 - \tau_{nt})n_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$g = \tau_{nt} n_t$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

## Comprometimento

$$\mathbb{W}^R(g) = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(\omega + (1 - \tau_{nt})n_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$g - (R - 1)\omega = \hat{g} = \tau_{nt} n_t$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$



# Comparando payoffs

- Note que:

$$\mathbb{W}^R(g) = \mathbb{W}^N(\hat{g})$$

- Como os payoffs são decrescentes em  $g$ :

$$\mathbb{W}^N(\hat{g}) > \mathbb{W}^N(g)$$

- Segue então que:

$$\mathbb{W}^R(g) > \mathbb{W}^N(g)$$

- Payoff de comprometimento mais elevado que o de não comprometimento

# Jogo repetido

- Se esse jogo se repetir, é possível implementar a solução de comprometimento?
  - ▶ Sucessão de problemas estáticos
- Digressão: dilema dos prisioneiros repetido
  - ▶ Dois jogadores: P1 e P2
  - ▶ Duas estratégias: Confessar (C), Não Confessar (NC)

## Dilema dos prisioneiros repetido

		P2	
		C	NC
P1	C	(1,1)	(5,0)
	NC	(0,5)	(3,3)

Equilíbrio de Nash estático = (C,C)

# Dilema dos prisioneiros repetido

- Suponha que o jogo se repita infinitamente

$$\text{Payoff} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t p_t, \quad 0 < \beta < 1$$

- ▶  $p_t$ : payoff estático em  $t$
- É possível sustentar cooperação – i.e., ambos jogam NC?
- “Trigger strategy”
  - ▶ Cada jogador inicialmente coopera
  - ▶ Pune com Nash estático para sempre se o outro desviar
- Desvio: ganho de curto prazo, mas perda futura pela reversão ao Nash estático
  - ▶ Se  $\beta$  for suficientemente alto, perda futura mais que compensa ganho de curto prazo
  - ▶ Possível sustentar cooperação

## Dilema dos prisioneiros repetido

- No exemplo:

$$\text{Payoff de continuar cooperando} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t 3 = \frac{3}{1-\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Payoff de desviar} &= \underbrace{5}_{\text{ganho de curto prazo}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t 1}_{\text{Nash estático}} \\ &= 5 + \frac{\beta}{1-\beta} \end{aligned}$$

- É possível sustentar cooperação se:

$$\frac{3}{1-\beta} \geq 5 + \frac{\beta}{1-\beta} \Rightarrow \beta \geq 1/2$$

# De volta ao problema de taxaço

- Jogo entre consumidores e governo se repete infinitamente
-   possível sustentar a soluço de comprometimento?
  - ▶ Mesmo que o governo não tenha tecnologia de comprometimento
- Desvio:
  - ▶ Consumidores acumulam capital:  $k_t = \omega, c_{1t} = 0$
  - ▶ Governo implementa  $\tau_{kt} = 1$
- Puni o: consumidores escolhem  $k_t = 0$  para sempre
  - ▶ Solu o de não comprometimento para sempre

## Payoff de desvio

- Se indivíduos acumulam capital ( $k_t = \omega, c_{1t} = 0$ ) e governo escolhe  $\tau_{kt} = 1$ :

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \overbrace{(1 - \tau_{kt})}^{=0} R \overbrace{k_t}^{=\omega} = (1 - \tau_{nt})n_t$$
$$g = \tau_{nt}n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{=1} R \underbrace{k_t}_{=\omega} = \tau_{nt}n_t + R\omega$$

- Payoff de desvio é dado por:

$$W^D = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t$$

$$g = \tau_{nt}n_t + R\omega$$

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{c t}} = 1 - \tau_{nt}$$

## Jogo repetido

- Payoffs ao longo do tempo são:

$$\text{Payoff de continuar cooperando} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbb{W}^R = \frac{\mathbb{W}^R}{1-\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Payoff de desviar} &= \mathbb{W}^D + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \mathbb{W}^N \\ &= \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^N \end{aligned}$$

- Portanto, solução de comprometimento é implementável se:

$$\frac{\mathbb{W}^R}{1-\beta} \geq \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^N$$



# Jogo repetido

- Ou:

$$\mathbb{W}^R + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^R \geq \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^N$$
$$\frac{\beta}{1-\beta} [\mathbb{W}^R - \mathbb{W}^N] \geq \mathbb{W}^D - \mathbb{W}^R$$

- O lado esquerdo acima é positivo
  - ▶ Igual a zero se  $\beta = 0$
  - ▶ Tende a infinito quando  $\beta$  se aproxima de 1
- Portanto, existe  $\hat{\beta} \in [0, 1)$  tal que, se  $\beta \geq \hat{\beta}$ , a solução de comprometimento é sustentável

# Jogo repetido

