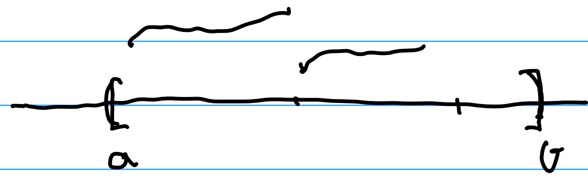
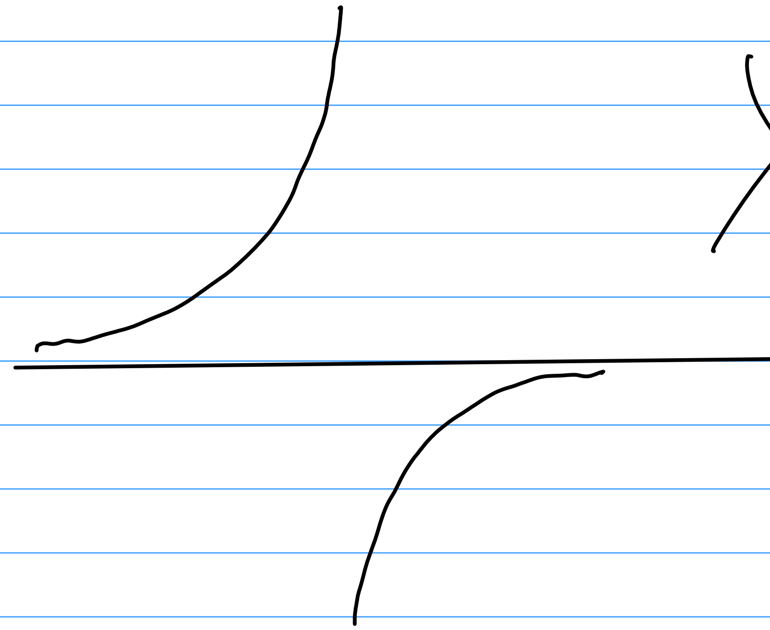
COMP III – 11/11/2021

RASCUNHO

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

SIM

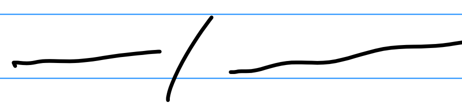




X NÃO

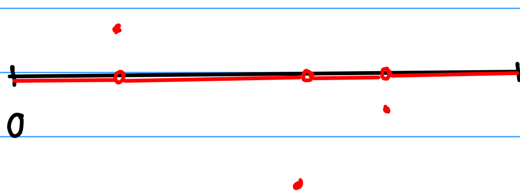
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

X NÃO



$y = u(x)$

$$\langle u, u \rangle = \int_0^{2\pi} u^2(x)\, dx = 0$$



2π MAS, $u \not\equiv 0$

$k \neq l$

$$\cos(kx)\cdot\cos(lx) = \frac{1}{2}\Big[\cos[(k+l)x] + \cos[(k-l)x]\Big]$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi}\cos[(k+l)x]\,dx + \int_0^{2\pi}\cos[(k-l)x]\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{\operatorname{sen}[(k+l)x]}{k+l}}\Bigg|_0^{2\pi} \to 0 + \cancel{\frac{\operatorname{sen}[(k-l)x]}{k-l}}\Bigg|_0^{2\pi} \to 0\right]$$

$k = l = 0$ ÓBVIO

$k = l \geq 1$: $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \operatorname{sen}^2(kx) = 2\cos^2(kx) - 1$

$$\cos^2(kx) = \frac{1+\cos(2kx)}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(kx)\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kx)\,dx = \pi + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\operatorname{sen}(2kx)}{2k}}\Bigg|_0^{2\pi} \to 0$$

ETC ...

— / —

$$a_0 = \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$k \geq 1$: $$a_k = \frac{\langle \cos(kx), f\rangle}{\langle \cos(kx), \cos(kx)\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

IDEM P/ b_k

TEOR $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTÍNUA E PERIÓDICA DE PERÍODO 2π.

ENTÃO, A EXPRESSÃO

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\,dx$$

NÃO DEPENDE DE $c \in \mathbb{R}$ (A INTEGRAL EM UM PERÍODO É CONSTANTE)

DEM DEFINA

$$F(c) = \int_c^{c+2\pi} f(x)\,dx, \quad c\in\mathbb{R}$$

COMO f É CONTÍNUA, DO TEOR. FUND. DO CÁLCULO PODEMOS AFIRMAR QUE $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ É DERIVÁVEL E

$$F'(c) = f(c+2\pi) - f(c)$$

COMO f É PERIÓDICA DE PERÍODO 2π, $f(c+2\pi) = f(c)$ E PORTANTO

$$F'(c) = 0, \ \forall\, c\in\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow F \text{ É CONSTANTE}$$

EXERCÍCIO DEMONSTRE QUE O MESMO RESULTADO VALE SE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ FOR SECCIONALMENTE CONTÍNUA, E PERIÓDICA DE PERÍODO 2π

PARIDADE:

$f \in SC_{2\pi}$

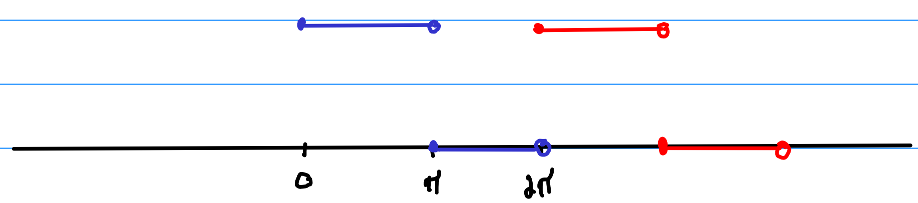
- SE f FOR UMA FUNÇÃO PAR ($f(-x) = f(x)$) ENTÃO $b_k = 0$, $k \geq 1$. DE FATO,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot sen(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\,sen(kx)}_{\text{ÍMPAR, SE } f \text{ FOR PAR}}\,dx$$

$$g(x) = f(x)\,sen(kx)$$

$$g(-x) = f(-x)\,sen(-kx) = f(x)\underbrace{sen(-kx)}_{= -sen(kx)} = -f(x)\,sen(kx) = -g(x)$$

A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO ÍMPAR EM UM INTERVALO SIMÉTRICO EM TORNO DA ORIGEM É NULA



OBS: A FUNÇÃO PERIÓDICA DE PERÍODO 2π DEFINIDA EM $[-\pi, \pi)$ POR

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi$$

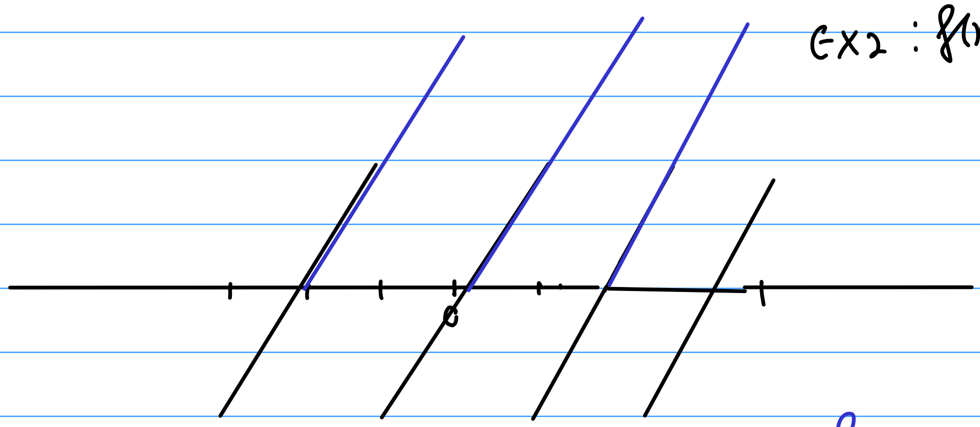
TEM A SEGUINTE EXPRESSÃO NO INTERVALO $[0, 2\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ x - 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$a_K = 0, \; K \geq 0$

$$K \geq 1: \; b_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \cdot sen(Kx)}_{\text{FUNÇÃO PAR}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_{0}^{\pi} x \cdot sen(Kx) dx$$

EX2: $f(x) = x, \; -\pi \leq x < \pi$



$f(x) = x, \; 0 \leq x < 2\pi$