Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Análise Harmônica

Nelson Kuhl

IME/USP

8 de outubro de 2020

Introdução

O objetivo é aproximar funções periódicas. Inicialmente serão consideradas funções de período 2π pois, como veremos adiante, aproximações para outros períodos podem ser deduzidas deste caso. As funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são as funções de período 2π mais famosas. Mas, para todo inteiro $k > 0$, as funções $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$ têm período $2\pi/k$, e portanto têm também período 2π. São estas funções que serão usadas para as aproximações, juntamente com a função constante igual a 1, que tem qualquer período.

Formulação do problema

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **periódica de período** 2π, aproxime-a por uma função da forma

$$g_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} [a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx] \tag{1}$$

de modo a minimizar o *erro quadrático*

$$EQ(f, g_m) = \sqrt{\int_0^{2\pi} [f(x) - g_m(x)]^2 \, dx}. \tag{2}$$

A solução é chamada de aproximação de f até o harmônico de ordem m.

Observações

1. Das expressões (1) e (2) vemos que se trata de um problema de **mínimos quadrados linear**, onde o produto interno associado ao erro quadrático é definido por

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,dx, \tag{3}$$

pois então temos $EQ(f, g_m) = \sqrt{\langle f - g_m, f - g_m\rangle}$;

2. como estamos trabalhando com funções periódicas de período 2π, basta usar informações sobre elas no intervalo $[0, 2\pi]$, o que justifica a definição do erro quadrático;

3. as funções 1, $\{\cos kx\}_{k=1}^{m}$ e $\{\,\mathrm{sen}\, kx\}_{k=1}^{m}$ usadas para aproximar f geram um espaço vetorial G_m de dimensão $2m+1$.

Classe de funções

Como o produto interno envolve integrais, precisamos especificar alguma regularidade para as funções, que seja abrangente o suficiente para aplicações.

Definição 1

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmete contínua** se, em cada intervalo (a, b) com $-\infty < a < b < \infty$, f tem no máximo uma quantidade finita de pontos de descontinuidade e nestes pontos os limites à esquerda e à direita existem.

Definição 2

$SC_{2\pi}$ é o espaço vetorial das funções seccionalmente contínuas, periódicas de período 2π. As aproximações serão estudadas neste espaço.

- Em $SC_{2\pi}$ a expressão (3) é um produto interno *degenerado*, mas no subespaço G_m ela é de fato um produto interno. Portanto o nosso problema admite uma única solução.

Relações de ortogonalidae

Para calcularmos os coeficientes, basta resolver o sistema normal, com $2m+1$ equações e $2m+1$ incógnitas. Porém, surpreendentemente, a base de G_m é ortogonal em relação ao produto interno (3), como se pode deduzir das identidades

$$\langle \cos kx, \cos lx \rangle = \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } k = l = 0, \\ \pi & \text{se } k = l \geq 1, \\ 0 & \text{se } k \neq l. \end{cases}$$

$$\langle \operatorname{sen} kx, \operatorname{sen} lx \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } k = l \geq 1, \\ 0 & \text{se } k \neq l. \end{cases}$$

$$\langle \cos kx, \operatorname{sen} lx \rangle = \int_0^{2\pi} \cos kx \operatorname{sen} lx \, dx = 0 \quad \forall k \geq 0, l \geq 1.$$

Coeficientes de Fourier

Das relações de ortogonalidade concluímos que o sistema normal é diagonal e que os coeficientes da expansão (1) que minimizam o erro quadrático (2) são iguais a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad k \geq 1, \tag{4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx, \qquad k \geq 1, \tag{5}$$

conhecidos como **coeficientes de Fourier** de f.

Intervalos de integração e paridade

Devido à periodicidade dos integrandos, as integrais que definem o erro quadrático (2), o produto interno (3) e os coeficientes de Fourier (4) - (5) podem ser calculadas em **qualquer intervalo de comprimento** 2π, sem alterar os resultados. Usando o intervalo $[-\pi, \pi]$ para as integrais, podemos então concluir que:

- se $f \in SC_{2\pi}$ é uma **função par**, então $b_k = 0$ para todo $k \geq 1$;
- se $f \in SC_{2\pi}$ é uma **função ímpar**, então $a_k = 0$ para todo $k \geq 0$.

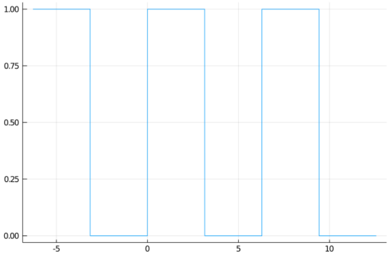
Exemplos

Exemplo 1

Calcule os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2π definida em $[0, 2\pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0 & \text{se } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Queremos fazer a análise harmônica da função 2π-periódica cujo gráfico é



Exemplos

Solução. Das fórmulas (4) - (5) para os coeficientes de Fourier temos

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

e, para $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kx\,dx = \left.\frac{\operatorname{sen} kx}{k\pi}\right|_0^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx = -\left.\frac{\cos kx}{k\pi}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{1-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}, & \text{se } k \text{ for ímpar,} \\ 0, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplos

Se quisermos por exemplo a aproximação até o harmônico de ordem 10 teremos

$$g_{10}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9}\right),$$

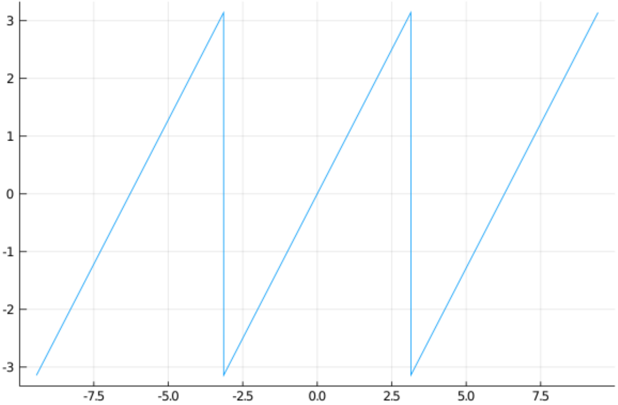
que neste caso coincide com $g_9(x)$. O que acontece quando aumentamos a quantidade de harmônicos? Discutiremos isso adiante, depois de mais alguns exemplos.

Exemplos

Exemplo 2

Calcule os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2π definida por $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$.

O gráfico de f é



Exemplos

Solução. Note que f é uma função ímpar, e portanto

$$a_k = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Para o cálculo dos coeficientes b_k, $k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(- \frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(- \frac{\pi \cos k\pi}{k} + \frac{\operatorname{sen} kx}{k^2} \Big|_0^\pi \right) = 2 \, \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Por exemplo, a aproximação até o harmônico de ordem 5 fica

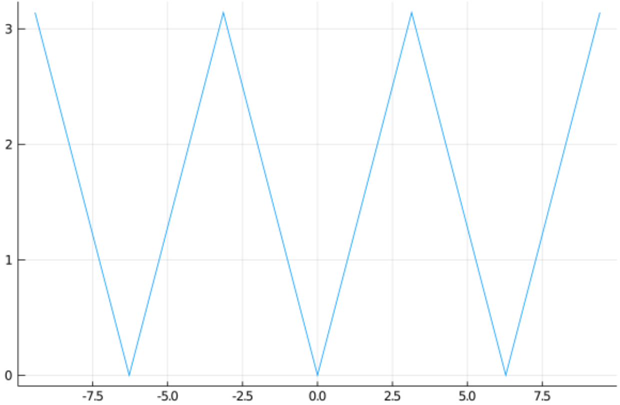
$$g_5(x) = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right).$$

Exemplos

Exemplo 3

Obtenha os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2π definida por $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$.

O gráfico desta função é



Exemplos

Solução. Agora a função é par e portanto

$$b_k = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Para os coeficientes a_k temos

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

e, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \right) = \frac{2}{\pi}\, \frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{se } k \text{ for ímpar,} \\ 0, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplos

Se quisermos, por exemplo, a aproximação até o harmônico de ordem 10, obtemos

$$g_{10}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \frac{\cos 9x}{9^2}\right)$$

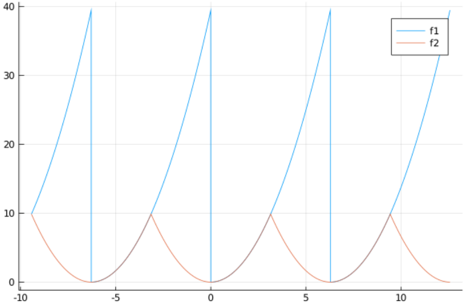
que neste caso também coincide com a aproximação até o harmônico de ordem 10.

Observação

- Para estudar uma função periódica, basta especificá-la em um intervalo de comprimento igual ao seu período. Mas deve-se prestar atenção para se evitar confusões. A função periódica do Exemplo 2 **não é a mesma** que a função periódica de período 2π definida por $f(x) = x$, $0 \leq x < 2\pi$.

Exercício

Calcule os coeficientes de Fourier das funções periódicas de período 2π definidas por (i) $f_1(x) = x^2$, $0 \leq x < 2\pi$ e (ii) $f_2(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$. Note que elas não são iguais, como podemos ver pelos seus gráficos:



Elas coincidem em $[0, \pi)$ e transladados deste intervalo por múltiplos de 2π, mas f_2 é par e contínua enquanto que f_1 não tem paridade e é descontínua em $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.