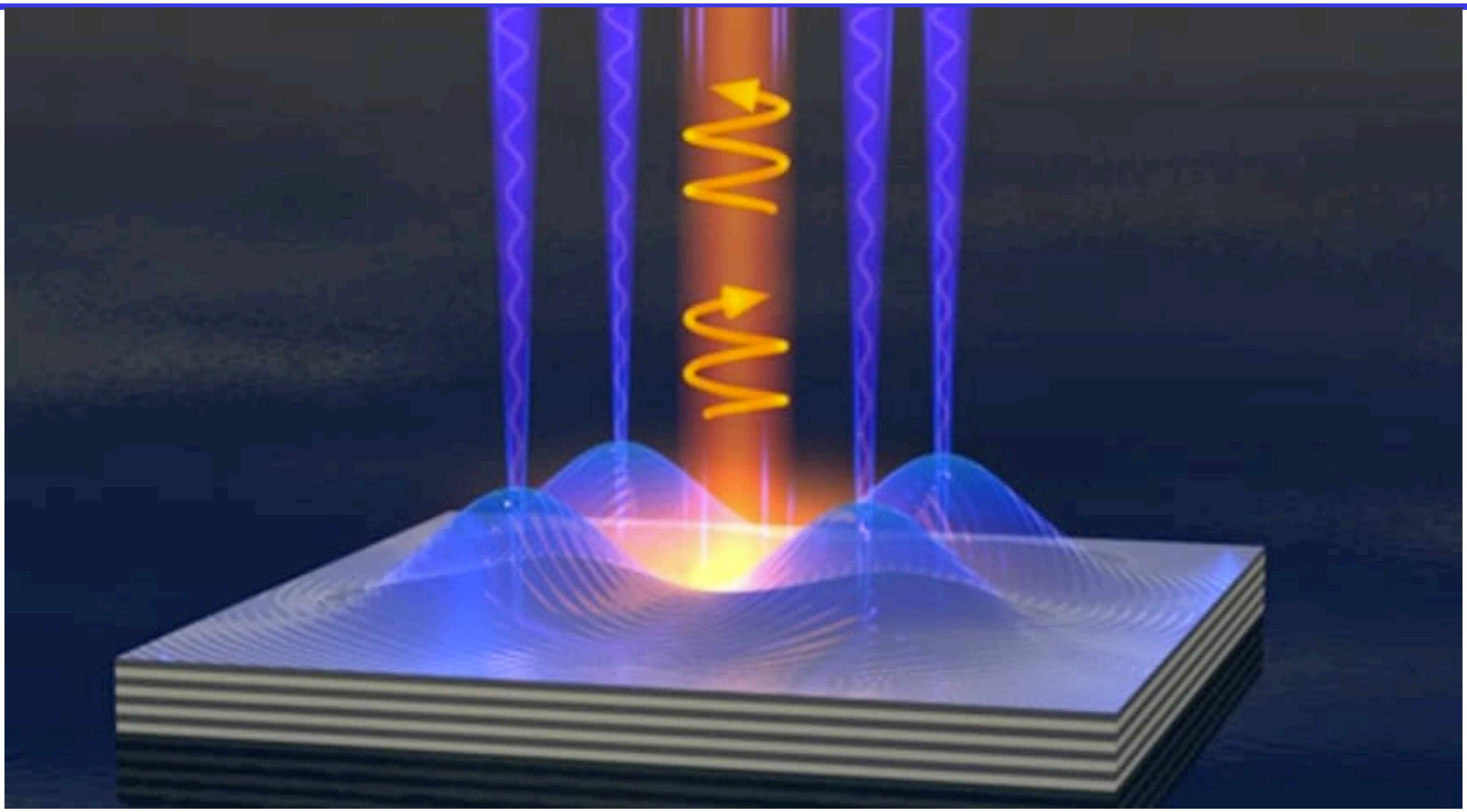


Eletrodinâmica: o Teorema de Poynting

- ⚡ Leis de Maxwell da Eletrodinâmica
- ⚡ Teorema de Poynting
- ⚡ Energia e momento do campo eletromagnético

As equações da Eletrodinâmica

- As leis da Eletrodinâmica, como reunidas por Maxwell, são escritas, de um modo geral, como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$ (Lei de Gauss para o campo elétrico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (Lei de Gauss para o campo magnético)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ (Lei de Ampère)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (Lei de Faraday)

- No caso de relações constitutivas lineares temos:

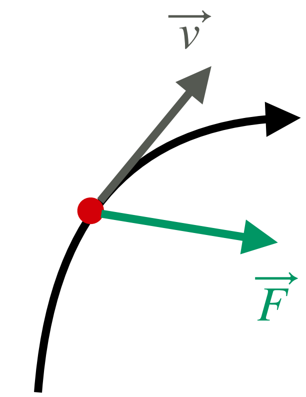
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

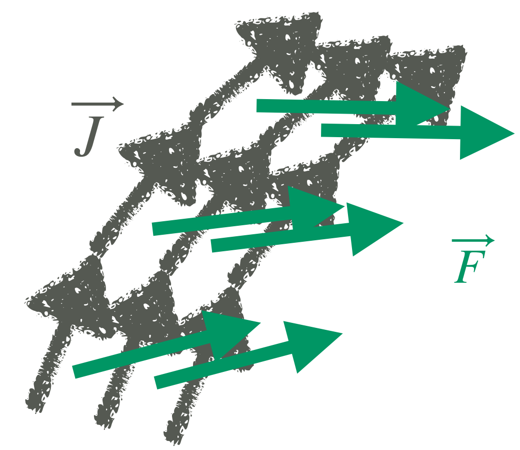
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{J}$$, onde $c_s^2 = 1/(\mu\epsilon)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Teorema de Poynting



- Em 1884 John Henry Poynting chegou a um resultado muito interessante, que clarifica o papel da ***energia*** e do ***momento*** na teoria eletromagnética.
- O ponto de partida é a noção de que uma ***força*** (p.ex., a Força de Lorentz) realiza ***trabalho***, com uma ***potência***:

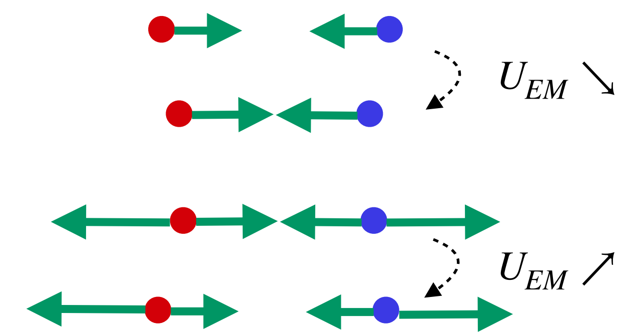


$$dP = dF \cdot \vec{v} = \left(dq\,\vec{E} + dq\,\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v}$$

$$= dq\,\vec{E} \cdot \vec{v} = (\vec{J}\,dV) \cdot \vec{v}$$

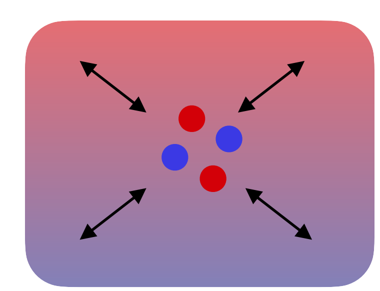
$$\Rightarrow \quad P = \int dV\,\vec{J} \cdot \vec{E}$$

- Essa potência corresponde à conversão de ***energia eletromagnética*** em ***energia mecânica*** e vice-versa**.**
- Por exemplo, se o campo realiza trabalho ***sobre*** o sistema, então uma certa quantidade de energia ***sai do campo eletromagnético***, e ***entra no sistema físico*** — por exemplo, na forma de calor, caso haja uma resistência.



- O inverso também pode ocorrer: podemos inserir energia num sistema, por exemplo, separando as cargas negativas e positivas, e desse modo realizando trabalho ***sobre o campo*** — aumentando, portanto a energia do campo.
- Mas se isso é verdade, então a ***contrapartida*** dessa potência no campo eletromagnético deveria ser uma mudança da energia total do campo — algo que podemos checar, porque sabemos a expressão para a ***densidade de energia do campo***:

$$\rho_{EM} = \frac{1}{2} \left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right)$$



- Mais do que isso: se essa energia flui entre o sistema e o campo, deve existir algo com interpretação de corrente que carrega essa energia. Essa é a essência do Teorema de Poynting.

Teorema de Poynting

- Vamos então retornar ao ponto de partida, que é a expressão para a potência com que o campo eletromagnético transfere energia de/para um sistema físico. Usando a Lei de Ampère temos:

$$P = \int_V dV\, \vec{J} \cdot \vec{E}$$

$$= \int_V dV \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \cdot \vec{E}$$

- Agora, note que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$, portanto:

$$P = \int_V dV \left[\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right]$$

- Pela Lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t$, portanto podemos escrever:

$$P = \int_V dV \left[-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right]$$

- Finalmente, usando o Teorema do Divergente no segundo termo chegamos em:

$$P = - \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \int_V dV \left[\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right]$$

Teorema de Poynting

- Se temos um meio linear, $\vec{H} \sim \vec{B}$ e $\vec{D} \sim \vec{E}$ (mesmo que a constante de proporcionalidade seja diferente em cada ponto!), e portanto:

$$P = -\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t}\int_V dV \left[\frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}\right]$$

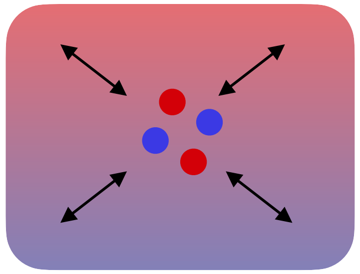
- Mas o último termo é a ***densidade de energia dos campos eletromagnéticos***! Ou seja, encontramos que:

$$P = -\oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t} \quad ,$$

ou , dito de outra forma:

$$\int_V dV \vec{J} \cdot \vec{E} = -\int_V dV\, \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \int_V dV \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t}$$

$$\rho_{Mec}(\vec{x}, t) = \sum_i m_i\, v_i^2(t)\, \delta[\vec{x} - \vec{x}_i(t)]$$



- Como a integral no volume é arbitrária, os integrando devem ser obedecer a mesma equação, ou seja:

$$\Rightarrow \quad \vec{J} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad ,$$

onde introduzimos o ***vetor de Poynting*** $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

- Podemos deixar isso numa forma ainda mais intuitiva se notarmos que o trabalho do campo EM é $\vec{J} \cdot \vec{E} = dP_{Mec}/dV = \partial \rho_{Mec}/\partial t$, e assim:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(\rho_{EM} + \rho_{Mec})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

- Ou seja: chegamos uma ***equação da continuidade para a energia***!

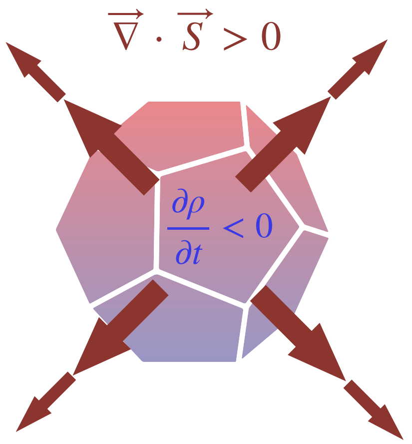
Teorema de Poynting e energia

- Vejamos então a quantidade vetorial mais importante da aula de hoje, o Vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- Esse vetor entra na equação da continuidade para a energia, ou seja:

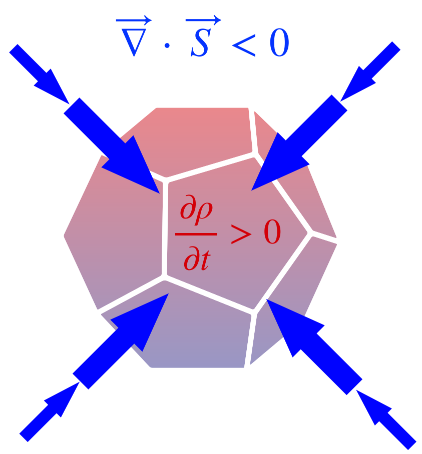
$$\frac{\partial \rho_{Tot}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$



- Vamos analisar com cuidado essa equação, para entendermos direito os ***sinais*** e a interpretação do vetor $\vec{S}$.
- Primeiro, note que, se num determinado volume a ***energia*** do sistema ***diminui***, $\partial \rho_{Tot}/\partial t < 0$, então o divergente é ***positivo***, $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} > 0$.
- Por outro lado, se nesse volume a ***energia*** do sistema ***aumenta***, $\partial \rho_{Tot}/\partial t > 0$, o divergente é ***negativo***, $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} < 0$.
- Isso significa que o vetor de Poynting é uma ***corrente de energia*** (que, como veremos logo mais, também pode ser interpretado como um ***densidade de momento***):

  ➡se $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} > 0$ num certo volume, isso significa que a energia está ***saindo*** desse volume (temos ***fontes*** de $\vec{S}$). A contrapartida dentro do volume é que a ***energia diminui***.

  ➡Por outro lado, se $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} < 0$, então temos "***sumidouros***" de energia dentro do volume, e portanto a ***energia*** naquele volume ***aumenta***.



- Em outras palavras: o Teorema de Poynting garante a ***conservação de energia*** entre o campo eletromagnético e o sistema físico onde agem as forças associadas àqueles campos! Uma expressão mais "intuitiva" seria:

$$\frac{\partial U_{Tot}(V)}{\partial t} = - \oint_{S(V)} d\vec{A} \cdot \vec{S}$$

- Note também que a equação da continuidade para energia pode também incluir a possibilidade de uma fonte externa de energia. Nesse caso temos:

$$\frac{\partial \rho_{Tot}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = P_{Ext} \quad , \quad \text{onde } P_{Ext} \text{ é a potência de uma fonte externa de energia.}$$

Teorema de Poynting e momento

- Podemos repetir o argumento apresentado há pouco no que toca à ***conservação de momento***.
- A força total nas cargas e correntes no volume V é:

$$\vec{F}_{Mec} = \frac{\partial \vec{P}_{Mec}}{\partial t} = \int_V dV \left(\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right)$$

- Novamente, utilizamos as Eqs. de Maxwell para expressar:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \quad \text{e} \quad \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Após algumas manipulações semelhantes às que fizemos antes, obtemos, ***no vácuo***:

$$\frac{\partial \vec{P}_{Mec}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV\, \vec{E} \times \vec{B} + \epsilon_0 \int_V dV \left[\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + c^2 \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})\right]$$

- Note que o primeiro termo do lado direito é basicamente o vetor de Poynting no vácuo, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \to \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$. Portanto:

$$\frac{\partial \vec{P}_{Mec}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV\, \frac{1}{c^2} \vec{S} + \epsilon_0 \int_V dV \left[\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + c^2 \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})\right]$$

- Esse primeiro termo dentro da integral é a ***densidade de momento*** do campo eletromagnético. O restante dessa expressão nós vamos poder identificar como o fluxo de momento, de um modo análogo pelo qual associamos o fluxo de energia com o vetor de Poynting. Mas por enquanto podemos tomar:

$$\vec{\pi}_{EM} = \frac{d\vec{P}_{EM}}{dV} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$ como a ***densidade de momento do campo eletromagnético***, e assim: $$\vec{P}_{Tot} = \vec{P}_{Mec} + \vec{P}_{EM} = \vec{P}_{Mec} + \int_V dV\, \vec{\pi}_{EM}$$

- Note esse papel dual do vetor de Poynting: por um lado, ele denota o fluxo de energia. Por outro, ele também denota a densidade de momento. Mas claro: assim como na mecânica usual, para que a energia de um sistema mude, é necessário fazer algum tipo de força, ou seja, mudar o momento — ou seja, o fluxo de energia é de fato dado pelo momento!

Teorema de Poynting e momento

- Vamos agora calcular os termos que restaram da nossa expressão completa para o momento:

$$\frac{\partial(\vec{P}_{Mec} + \vec{P}_{EM})}{\partial t} = \epsilon_0 \int_V dV \left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + c^2\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - c^2\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]$$

- Como o primeiro termo nos dá a variação do momento do campo, os termos restantes devem denotar o fluxo de momento que é trocado entre o campo e o sistema mecânico. De fato, é isso que o cálculo a seguir mostra.

- Vamos tomar os termos dentro da integral que só envolvem o campo elétrico $\vec{E}$ — e note que a estrutura dos termos que envolvem o campo magnético é idêntica, a menos do fator $1/c^2$. Para esses termos com o campo elétrico temos, por exemplo, a componente x:

$$\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_x = E_x\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] - E_y\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] + E_z\left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

- Mas note que podemos reescrever isso de um modo bem mais simples, como:

$$\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_x = \vec{\nabla}\cdot\left(E_x\vec{E}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_i = \vec{\nabla}\cdot\left(E_i\vec{E}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(E_iE_j\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2\right]$$

- Ou seja, a expressão original toma a forma:

$$\frac{\partial(\vec{P}_{Mec} + \vec{P}_{EM})_i}{\partial t} = \epsilon_0 \int_V dV \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2 + c^2\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{B}^2\right)\right]$$

Teorema de Poynting e momento

- Vamos reescrever a expressão que acabamos de obter em termos de um novo tipo de objeto:

$$\frac{\partial(\vec{P}_{Mec}+\vec{P}_{EM})_i}{\partial t} = \int_V dV \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\left[T_{ij}\right] \quad , \quad \text{onde}$$

$$T_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j + c^2 B_iB_j\right) - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) = \epsilon_0\left(E_iE_j + c^2B_iB_j\right) - \delta_{ij}\,\rho_{EM}$$

- O ponto de escrever essa expressão desse modo é que o lado direito é o ***divergente*** de alguma coisa:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} T_{ij}$$

- Isso significa que podemos usar o Teorema de Gauss (do divergente) e escrever:

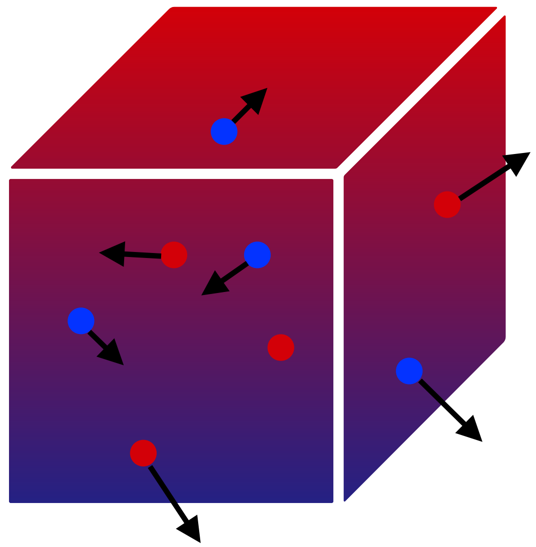
$$\frac{\partial(\vec{P}_{Mec}+\vec{P}_{EM})_i}{\partial t} = \oint_{S(V)} \sum_j dS_j\, T_{ij} = \sum_j \oint_{S(V)} dS_j\, T_{ij} \quad , \quad \text{onde o elemento de área é } dS_j = dS\,\hat{n}_j$$

- Isso significa que a força total no sistema é dada pela expressão:

$$\frac{\partial(\vec{P}_{Mec}+\vec{P}_{EM})_i}{\partial t} = \vec{F}_i \quad , \text{com} \quad \vec{F}_i = \oint_{S(V)} dS \sum_j \hat{n}_j\, T_{ij}$$

- Em outras palavras, a força é uma integral sobre uma superfície de algo — a ***pressão*** (força por unidade de área)!

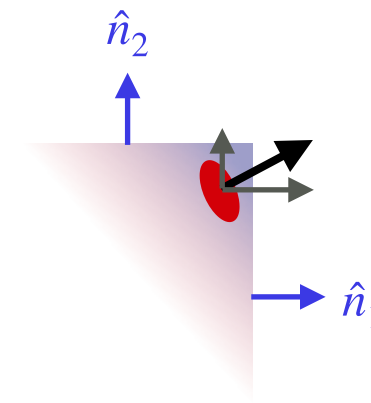
$$\frac{d\vec{F}_i}{dS} = \sum_j \hat{n}_j\, T_{ij}$$



Teorema de Poynting e momento

- Esse objeto T_{ij} é chamado de ***tensor de estresse e momento do campo eletromagnético***:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j + c^2 B_i B_j \right) - \delta_{ij}\, \rho_{EM}$$



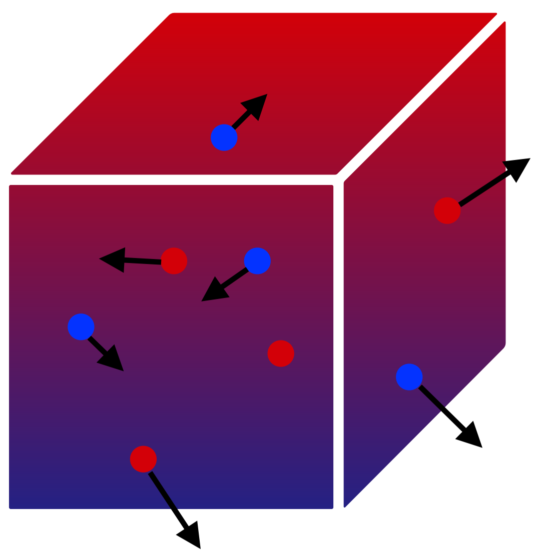
- Ele denota o fluxo de momento na direção i que cruza a área orientada na direção j — note que essa expressão é simétrica pela troca $i \leftrightarrow j$, como deveria ser: de fato,

$$\left.\frac{\partial P_i}{\partial t}\right|_{\hat{n}_j} \sim P_i\, v_j$$

$$\left.\frac{\partial P_j}{\partial t}\right|_{\hat{n}_i} \sim P_j\, v_i$$

- Note que, se nenhuma ***força externa*** estiver agindo sobre o sistema (ou seja, as únicas forças são internas, incluindo as forças eletromagnéticas), então temos conservação de momento, ou seja:

$$\frac{\partial (\vec{P}_{Mec} + \vec{P}_{EM})}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} T_{ij} = 0$$

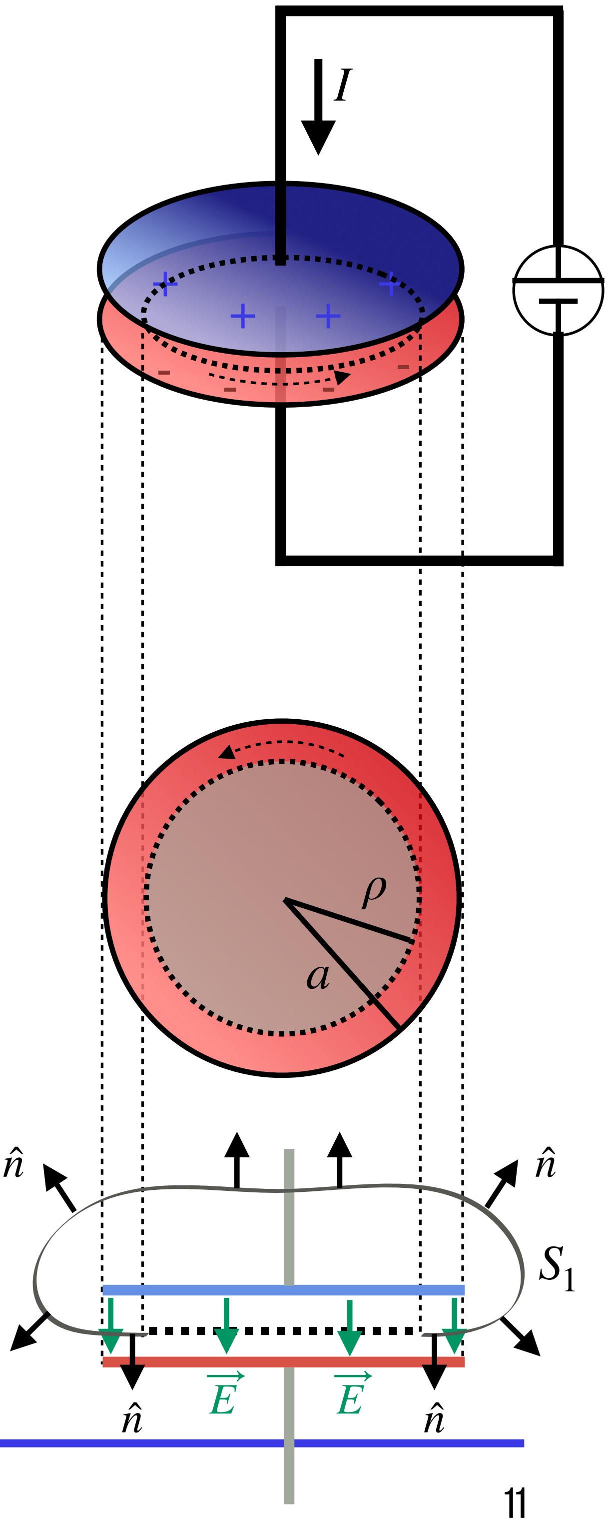


- A equação acima expressa a ***conservação do tensor de estresse e momento***, que é o que garante ***conservação de momento*** no contexto de ***mecânica de fluidos***.
- Note também que o tensor de estresse e momento obedece uma propriedade útil e interessante:

$$Tr(T_{ij}) = \sum_i T_{ii} = \sum_i \left[\epsilon_0 \left(E_i E_i + c^2 B_i B_i \right) - \delta_{ii}\, \rho_{EM} \right]$$

$$= \sum_i \left[\left(\epsilon_0 E_i E_i + \frac{1}{\mu_0} B_i B_i \right) - \delta_{ii} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \right] = \rho_{EM} - \frac{3}{2} \rho_{EM} = -\, \rho_{EM}$$

Teorema de Poynting: aplicação



- Vamos considerar o exemplo mais simples possível para estudar o fluxo de energia num sistema eletromagnético: um ***capacitor*** sendo carregado.
- Vamos assumir áreas para as placas circulares de raio a e área $A = \pi a^2$, e que as placas estão separadas por uma distância h.
- A carga em cada uma das placas é dada por:

  $Q = I\,t$, e portanto a densidade superficial de cargas e o campo elétrico são:

  $$\sigma = \pm \frac{I\,t}{A} \quad , \quad \vec{E} = -\frac{I\,t}{\epsilon\, A}\hat{z} \qquad \rho_E = \frac{1}{2}\frac{I^2\,t^2}{\epsilon\, A^2}$$

- Claramente o campo está ***crescendo com o tempo***, e portanto temos ***energia fluindo para dentro*** do capacitor. Quem faz esse papel é, claro, o vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Vamos encontrá-lo a seguir — mas primeiro precisamos encontrar o campo magnético.
- Vamos usar a Lei de Ampère (corrigida pelo termo da corrente de deslocamento), integrada num circuito ***dentro*** do capacitor, de raio ρ, como indicado na figura:

  $$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = \int_{S(c)} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \int_{S(c)} d\vec{S} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

- A circulação de $\vec{H}$ nos dá a componente na direção $\hat{\varphi}$. Na integral na área circunscrita pelo circuito, vamos escolher a área que fecha "por cima", como indicado na figura (S_1). Temos então:

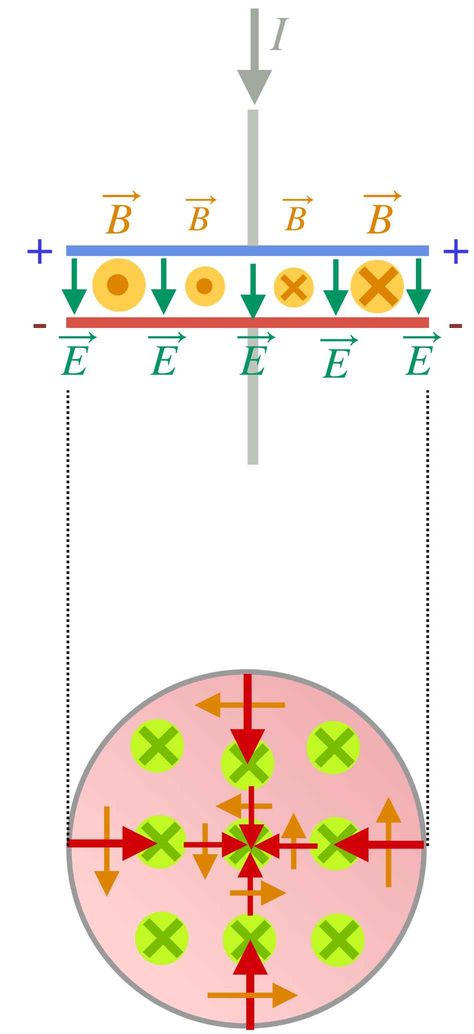
  $$\int_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{J} = -I$$

  $$\int_{S_1} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = +(\pi a^2 - \pi \rho^2)\frac{\partial}{\partial t}\frac{It}{\pi a^2} = +\frac{a^2 - \rho^2}{a^2} I$$

- Juntando tudo agora temos:

  $$2\pi\rho \frac{B_\varphi}{\mu} = -I + \frac{a^2-\rho^2}{a^2} I = -\frac{\rho^2}{a^2} I \quad \Rightarrow \quad H_\varphi = -\frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

Teorema de Poynting: aplicação



- Portanto, acabamos de encontrar que os campos elétrico e magnético são dados por:

$$\vec{E} = -\frac{I\,t}{\epsilon\,A}\hat{z}$$

$$\vec{H} = -\frac{I\,\rho}{2A}\hat{\varphi}$$

- Você pode (***deve***!) verificar que esses campos obedecem todas as equações das Leis de Maxwell.
- O vetor de Poynting é dado, portanto, por:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(-\frac{I\,t}{\epsilon\,A}\hat{z}\right) \times \left(-\frac{I\,\rho}{2A}\hat{\varphi}\right) = \frac{I^2\rho t}{2\epsilon A^2}(-\hat{\rho})$$ ou seja, ele aponta para dentro!

Em outras palavras, o fluxo de energia é para dentro do sistema!

- Vejamos agora o que está acontecendo com a energia:

$$\rho_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{I^2t^2}{2\epsilon A^2} \quad ,$$ o que está aumentando com o tempo

$$\rho_B = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{\mu I^2\rho^2}{8A^2} \quad ,$$ que fica constante com o tempo.

- Note que esses resultados são exatamente aqueles que satisfazem o Teorema de Poynting:

$$\frac{\partial(\rho_E + \rho_B)}{\partial t} = \frac{I^2\,t}{\epsilon A^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho S_\rho\right) = -\frac{I^2\,t}{\epsilon A^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \rho_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

Próxima aula:

- Mais sobre o teorema de Poynting: momentos e estresses
- Exemplos
- Radiação eletromagnética: preâmbulos

- Leitura: Griffiths, Cap. 8
- Leitura complementar: Jackson, Caps. 5-6-7