Tópico 5 – Relação constitutiva entre Tensão e Deformação no Regime Elástico
2020

EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

FUNDAMENTOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS

INTRODUÇÃO

As soluções dos problemas de mecânicas dos sólidos devem satisfazer simultaneamente (tempo e posição) três condições:

- **equações de equilíbrio (ou de movimento)**
- **condições geométricas (ou compatibilidade entre deslocamentos e deformações)**
- **leis constitutivas de materiais (ou relações entre tensão e deformação)**

Condições iniciais e de contorno nos esforços e nos deslocamentos estão embutidas nos dois primeiros itens

INTRODUÇÃO

Condições estáticas (ou dinâmicas)

σ_{ij} – campo de tensões

ρb_i – forças de campo

t_i – forcas de superfície

Equações de equilíbrio para uma análise estática:

nos pontos da superfície

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

nos pontos internos

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$

(três equações de equilíbrio)

INTRODUÇÃO

Condições geométricas (ou compatibilidade)

ε_{ij} **– campo de deformações**

u_i **– campo de deslocamentos**

Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Condições de compatibilidade (integrabilidade)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

INTRODUÇÃO

Tomando-se os deslocamentos como variáveis:

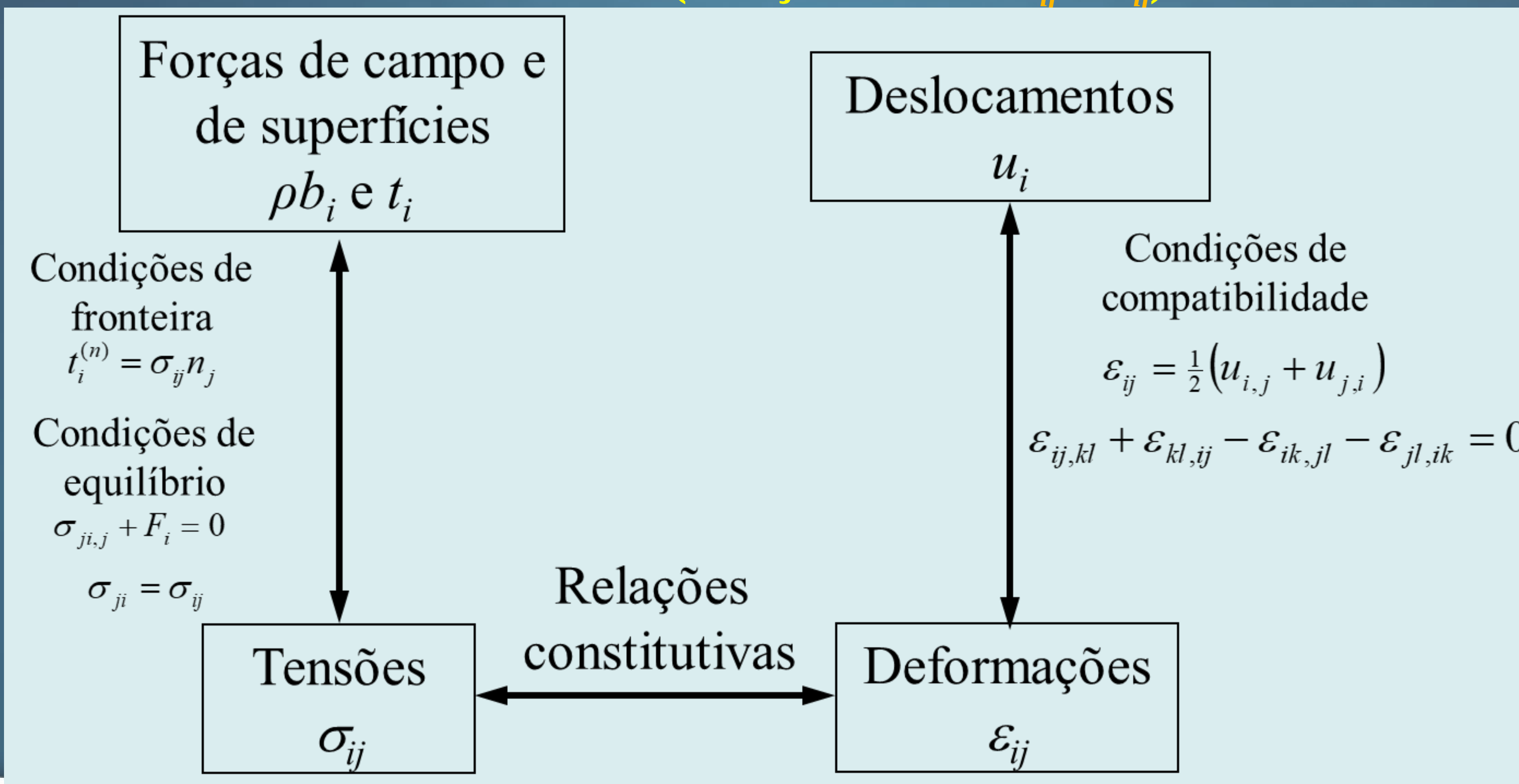
- ✓ **tem-se 9 variáveis**
  - 6 componentes de tensões (σ_{ij})
  - 3 componentes de deslocamentos (u_i)
- ✓ **3 equações de equilíbrio**

As 6 equações adicionais são dadas pelas leis constitutivas ou relações entre tensão e deformação do material

Condições estáticas (ou dinâmicas) e geométricas (ou de compatibilidade) são sempre válidas

INTRODUÇÃO

Os diversos comportamentos de materiais são descritos pelas leis suas constitutivas (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})



INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

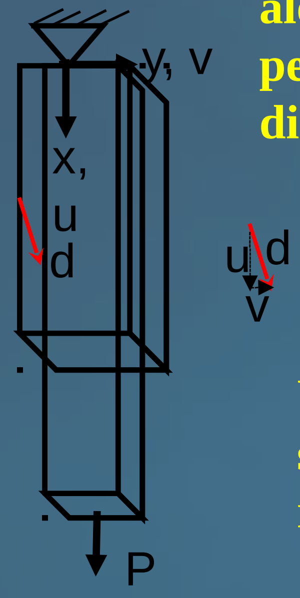
Barra prismática de seção constante A e comprimento L Considere que uma força P provoca deformação, sendo que para caracterizar essa deformação, inicialmente faz-se uma hipótese sobre o campo de deslocamentos (hipótese cinemática).

Uma hipótese cinemática adequada é que os deslocamentos sofridos são tais que o eixo longitudinal da barra permaneça reto e as seções transversais, inicialmente planas e ortogonais ao eixo longitudinal, continuem planas e ortogonais ao eixo longitudinal.

OBS: A hipótese adotada é comprovada experimentalmente, porém em regiões próximas as vinculações e aplicação de cargas, ocorrem distorções da seção transversal (Principio de Saint Venant)

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})



Com a hipótese cinemática assumida, a barra pode sofre um alongamento se tracionada e um encurtamento se comprimida. É natural pensar que a deformação irá produzir efeitos na direção transversal à direção de aplicação da carga.

A hipótese cinemática adotada não considerou a resposta do material!!!

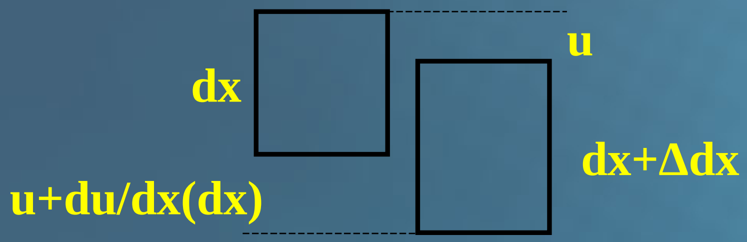
Um vetor d do deslocamento de um ponto da barra, tem as suas componentes *u* e *v* em relação a direção *x* e *y* respectivamente.

$$\mathbf{d}(x, y) = u(x)\mathbf{e}_1 + v(y)\mathbf{e}_2$$

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Considerando apenas o alongamento longitudinal



$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x$$

De maneira análoga para a deformação transversal $\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_y$

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Analisando o efeito do carregamento externo em termos de esforços internos, tem-se que em qualquer seção obtida por um corte ortogonal ao eixo longitudinal (caso da viga), haverá um esforço normal (N) igual a força aplicada.

O esforço normal é definido por:

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

Para o caso da barra, admite-se que as tensões normais são distribuídas uniformemente na seção (coerência com a hipótese cinemática adotada). Portanto

$$N = \sigma_x A$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

A relação entre tensão e deformação deve, necessariamente, envolver parâmetros do meio estudado, de modo a se estabelecer o comportamento de dado material quando o mesmo é submetido a um carregamento (Relações constitutivas).

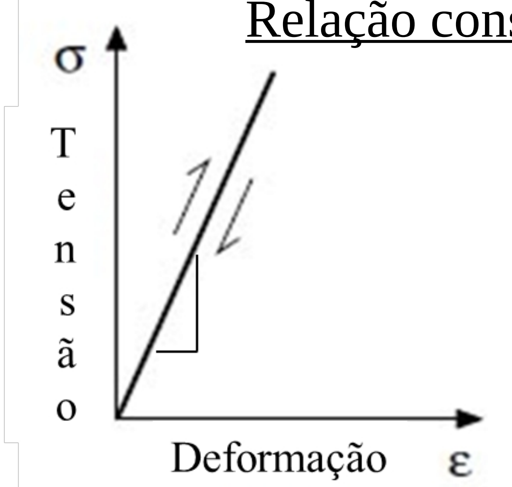
É desejável que uma relação constitutiva:

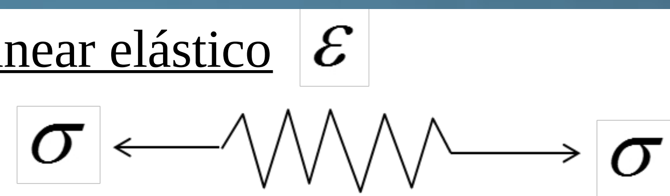
- **Sejam dadas por relações matemáticas simples;**
- **Envolvam um número reduzido de parâmetros;**
- **Sejam representativas do comportamento real do material.**

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Relação constitutiva linear elástico



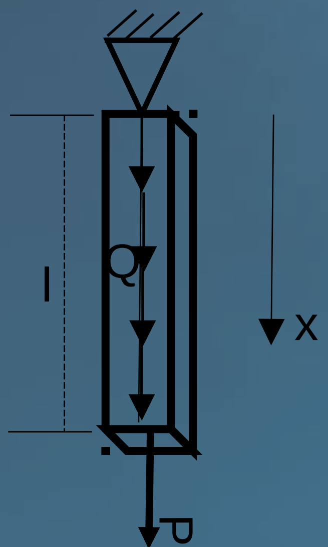


$$\sigma = E\varepsilon$$

- Representa porções lineares do comportamento mecânico
- Normalmente usado para representar o comportamento mecânico até à tensão limite de elasticidade
- O trajeto da curva no carregamento é igual no descarregamento
- A relação linear não depende da taxa de aplicação da deformação (independente do tempo)

INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

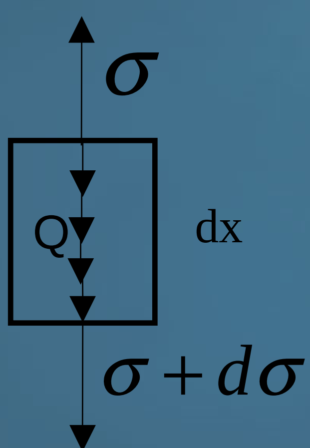


Equilíbrio de uma seção infinitesimal:

$$\sum F = -\sigma A + Q dx + (\sigma + d\sigma)\, A = 0$$

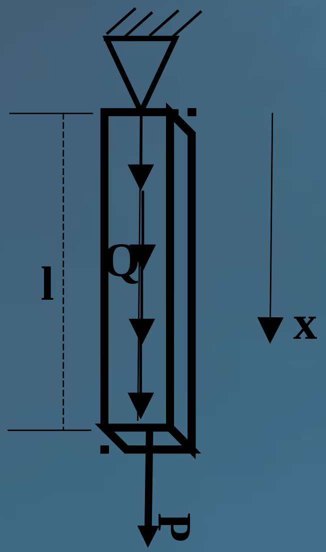
$$Q dx + d\sigma A = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{Q}{A}$$



INTRODUÇÃO

Exemplo de barra submetida a tração (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})



Considerando a lei constitutiva linear elástica:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Substituindo a relação de compatibilidade:

$$\sigma = E\frac{du}{dx}$$

Utilizando a relação acima na equação de equilíbrio:

$$E\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = E\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{Q}{A}$$

$$u'' = -\frac{Q}{EA}$$

Para a solução do problema basta considerar as condições de fronteira:

$$u = 0 \quad em \;\; x = 0$$

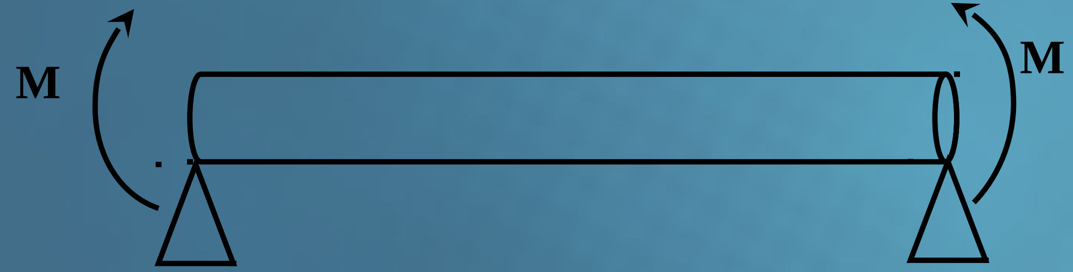
$$u' = \frac{P}{EA} \;\; em \;\; x = l$$

INTRODUÇÃO

Exemplo de viga submetida a flexão pura (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Flexão – Mudança da curvatura do eixo. No caso estudado serão consideradas somente barras de eixo reto e com um plano longitudinal de simetria, sendo o carregamento localizado nesse plano, pois, caso contrário também ocorrerá torção (Flexão + Torção)

Flexão pura normal – Somente momento aplicada no plano de simetria.



INTRODUÇÃO

Exemplo de viga submetida a flexão pura (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

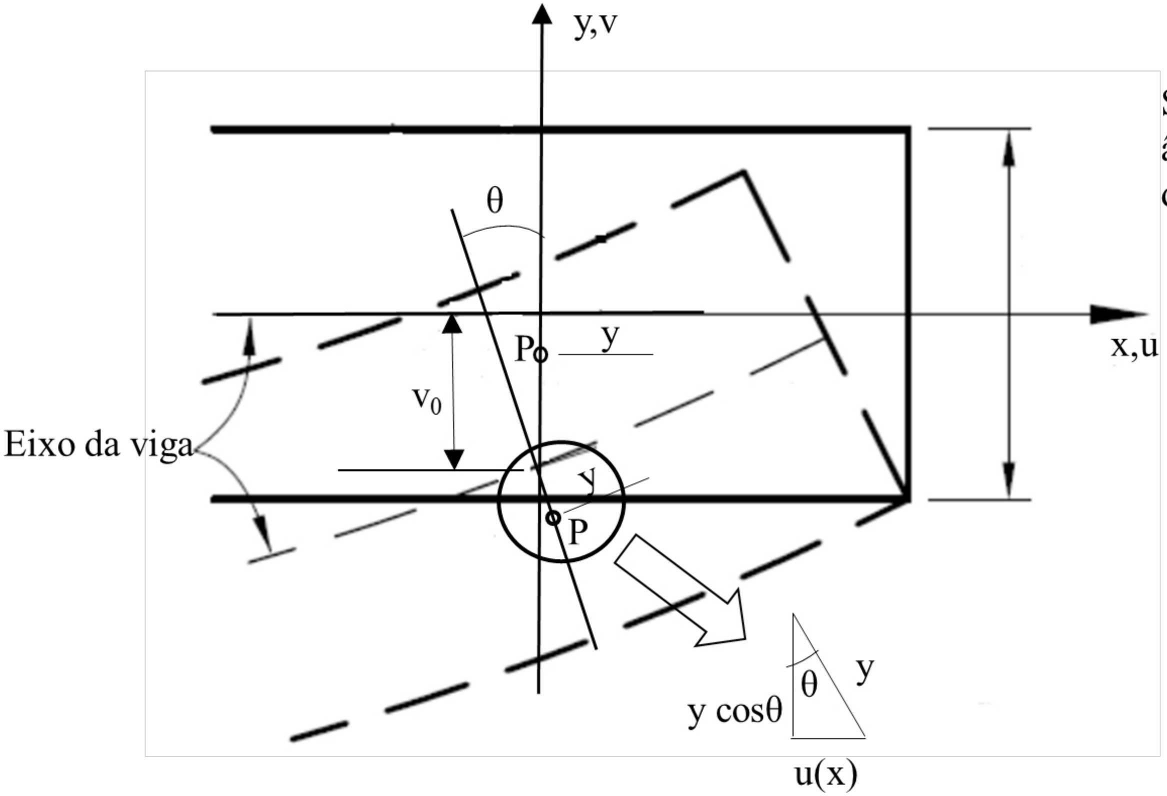
A deformação resultante leva ao aparecimento de tensões normais de tração e compressão.
A distribuição das tensões é consequência do campo de deslocamentos assumidos (hipótese cinemática).

Hipótese cinemática de Euler Bernoulli.

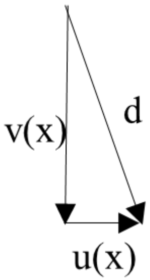
Campo de deslocamentos seja tal que as seções transversais inicialmente planas e ortogonais ao eixo longitudinal, permaneçam plana e ortogonais ao eixo longitudinal após o deslocamento.

INTRODUÇÃO

Exemplo de viga submetida a flexão pura (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})



Segundo a hipótese cinemática adotada, o ângulo θ confunde-se com a primeira derivada da função y.



$$v(x) = -v_0(x) - y(1 - \cos\theta)$$

$$u(x) = y\, sen\theta$$

INTRODUÇÃO

Exemplo de viga submetida a flexão pura (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Para pequenos deslocamentos (cos θ=1, senθ=tanθ=θ)

O deslocamento vertical de um ponto qualquer da viga é função apenas de x e igual ao deslocamento do eixo naquele mesmo ponto ($v(x)=-v_0(x)$).

O deslocamento horizontal de um ponto qualquer da viga é proporcional ao produto de sua distância ao eixo pela derivada da função deslocamento vertical ($u(x)=yv'(x)$).

Todo comportamento da viga fica descrito no seu plano longitudinal de simetria (função somente de x e y e independente de z)

$$d\left(x, y\right) = u(x, y)e_1 + v(x, y)e_2 + 0e_3$$

INTRODUÇÃO

Exemplo de viga submetida a flexão pura (relações entre σ_{ij} e ε_{ij})

Considerando as relações de compatibilidade

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ysen\theta\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial v}{\partial x}\right) = y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = yv''$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-v_0\right) = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = v' - v' = 0$$

Considerando a relação constitutiva

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Eyv''$$

Considerando as relações de equilíbrio

$$V = \int_A \tau_{xy} dA = \int_A G\gamma_{xy} dA = 0$$

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A Eyv'' dA = Ev'' \int_A y dA = 0$$

$$M \int_A y\sigma_x dA = \int_A Ey^2 v'' dA = Ev'' \underbrace{\boxed{\int_A y^2 dA}}_{I} = EIv''$$

O primeiro momento de área é nulo (passa pelo CG da seção)

$$v'' = \frac{M}{EI}$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y$$

INTRODUÇÃO

As relações constitutivas de um material são determinadas experimentalmente através da medição de grandezas físicas diretamente: tensão, deformação, temperatura, tempo e indiretamente: parâmetros internos

Os efeitos dos parâmetros internos na relação entre tensão e deformação do material é convenientemente expresso em termos do histórico da tensão e da deformação, ou memória dos eventos relativos ao material

INTRODUÇÃO

Como regra o comportamento do material é complicado

Realizam-se simplificações e idealizações para modelar matematicamente (e aproximadamente) o comportamento real do material a fim de solucionar problemas práticos

Por exemplo: despreza-se o efeito do tempo

Para um material elástico ideal o comportamento é idealizado como reversível e independente da forma de carregamento

Para um modelo plástico de material o comportamento é irreversível e dependente da forma de carregamento

Materiais Viscoelástico ou Viscoplástico são dependentes do tempo

HIPÓTESES

- Independência do tempo

- Despreza-se interferência entre processos mecânicos e térmicos

Válido para a maioria dos materiais estruturais
- metais
- cerâmicos
- plásticos
- borrachas

NECESSIDADE DE UM MODELO ELÁSTICO DE MATERIAL

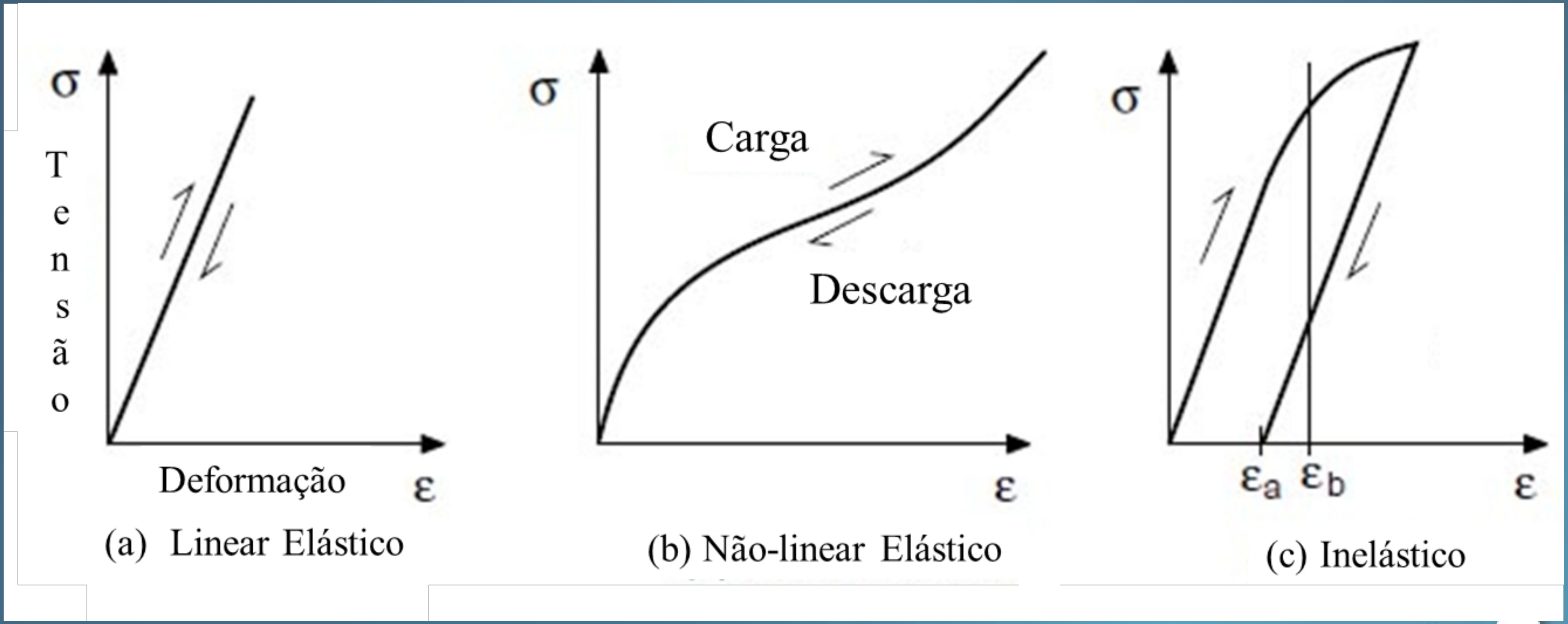
Existem vários modelos constitutivos para materiais elásticos

O estudo destes materiais é importante por duas razões:

- ✓ **por si só: descreve o comportamento de muitos materiais de engenharia sob certos níveis de esforços (modelo linear elástico é usado para modelar os materiais metálicos sob tensão abaixo do limite elástico) é a base da teoria da elasticidade**

- ✓ **são utilizados para a teoria da plasticidade (generalização da teoria da elasticidade) modelos elasto-plásticos descrevem o comportamento dos metais sob tensões acima do limite elástico quando acontece o escoamento**

NECESSIDADE DE UM MODELO ELÁSTICO DE MATERIAL



DEFINIÇÕES

Material Elástico

- material deforma-se sob a aplicação de esforços
- ao retirar-se os esforços o material retorna à forma e dimensão original, ele é dito elástico
- para esses materiais o estado de tensão depende somente do estado de deformação e não da taxa de deformação ou do histórico de deformações

$$\sigma_{ij} = f\left(\varepsilon_{kl}\right)$$

f é a função resposta elástica do material

- reversível e independente do forma de carregamento
- com esta definição é dito ***Material Elástico de Cauchy***
- este material pode gerar ou consumir energia sob ciclos específicos de carga e descarga $\Rightarrow$ viola a termodinâmica

DEFINIÇÕES

Material Hiperelástico ou Material Elástico de Green

- restrições sob o material elástico de Cauchy
- existência da função densidade de energia de deformação elástica (U)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Para não violar as leis da termodinâmica a função resposta elástica do material deve estar restrita pelo conceito de energia potencial de deformação

Do principio dos trabalhos virtuais:

$$\iiint_{\Delta V} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \boxed{\iiint_{\Delta V} \rho b_i \delta u_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} \delta u_i dS}$$

$$\iiint_{\Delta V} \delta U dV$$

Então:

$$\iiint_{\Delta V} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \iiint_{\Delta V} \delta U dV$$

Como ΔV é uma região arbitrária, isto é, válido para qualquer volume. Então:

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta U}{\delta \varepsilon_{ij}}$$

ou:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

DEFINIÇÕES

Material Elástico Incremental ou Hipoelástico

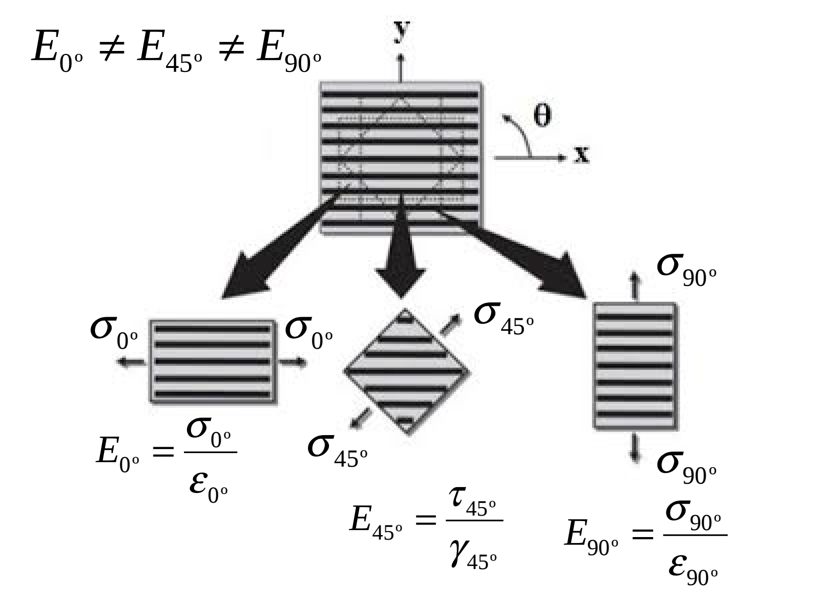
- **O estado de tensão é uma função do estado de deformação atual e da forma de carregamento (histórico do estado de tensão) seguido para atingir o estado atual**

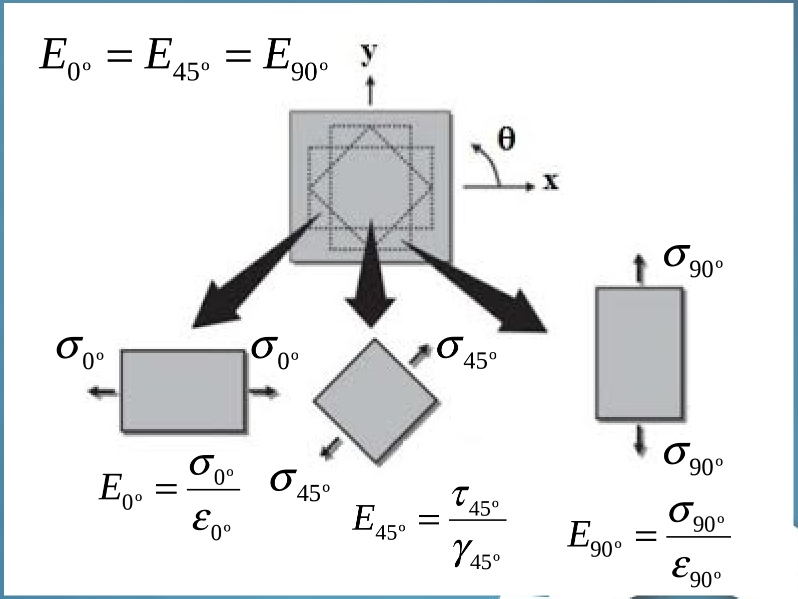
$$\dot{\sigma}_{ij} = f\left(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn}\right)$$

DEFINIÇÕES

Material sem Simetria de Propriedades

Material com Simetria de Propriedades





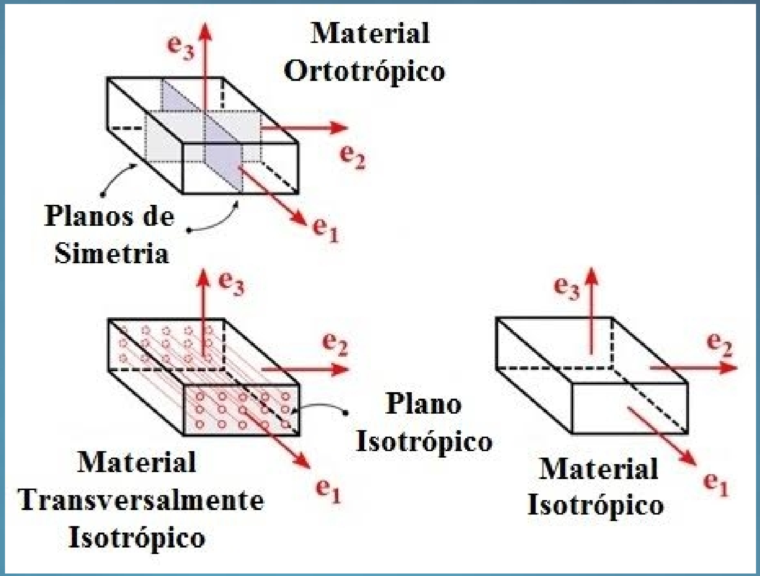
DEFINIÇÕES

Material com Simetria de Propriedades

Anisotrópico ⇒ **se o material não possui simetria de propriedades**

Ortotrópico ⇒ **três planos ortogonais entre si com simetria de propriedades**

Transversalmente Isotrópico ⇒ **simetria rotacional de propriedades em torno de um eixo coordenado**



Isotrópico ⇒ **comportamento idêntico em todas as direções, todo plano é plano de simetria e todo eixo é eixo de simetria rotacional**

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Relação elástica genérica entre tensão e deformação

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

B_{ij} componentes do tensor de tensões residuais (para $\varepsilon_{ij} = 0$)

C_{ijkl} das constantes elásticas do material

Se para $\varepsilon_{ij} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = 0$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Lei de Hooke generalizada

(dependência linear entre tensão e deformação)

como σ_{ij} e ε_{ij} são tensores de 2° ordem $\Rightarrow$ C_{ijkl} é tensor de 4° ordem

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Um tensor de 4° ordem possui $3^4 = 81$ termos independentes (constantes elásticas)

Como σ_{ij} e ε_{ij} são tensores simétricos, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

$\Rightarrow$ C_{ijkl} reduz para 36 constantes elásticas independentes

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

⇒ **para um material elástico de Green: $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$**

$$U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

Como: $$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$ **e** $$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$ **e** $$U = \text{const}$$

Então: $$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

$$C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$$

⇒ **C_{ijkl} possui 21 constantes elásticas independentes**

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

É comum organizar a relação linear elástica entre a tensão e a deformação da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$c_{11}=C_{1111}$

$c_{12}=C_{1122}=C_{2211}$

...

Considerando $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$

6 componentes independentes

6 componentes independentes

21 componentes independentes

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Considerando a relação inversa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{kl}} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

$$C_{ijkl}^{-1} = S_{ijkl}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Relações isotrópicas lineares elásticas entre tensão e deformação

Para materiais isotrópicos $\Rightarrow$ C_{ijkl} é um tensor isotrópico de 4° ordem

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \alpha\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

λ, μ e α são constantes escalares

para C_{ijkl} simétrico $\Rightarrow$ $\alpha = 0$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

portanto

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Para materiais isotrópicos $\Rightarrow$ 2 valores independentes (λ e μ) constantes de Lame

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Relações isotrópicas lineares elásticas entre tensão e deformação

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}$$

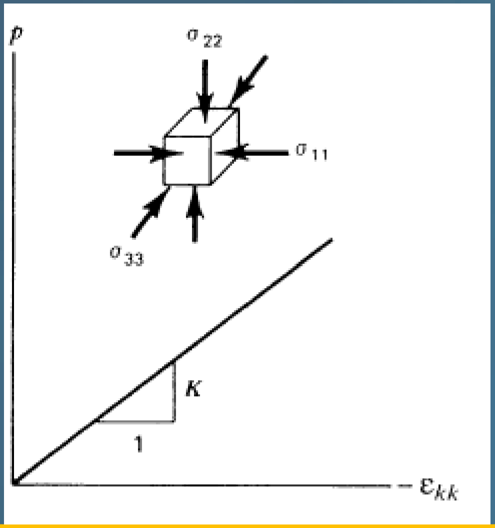
$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$$

Relações constitutivas genéricas para material isotrópico linear elástico

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Compressão hidrostática:

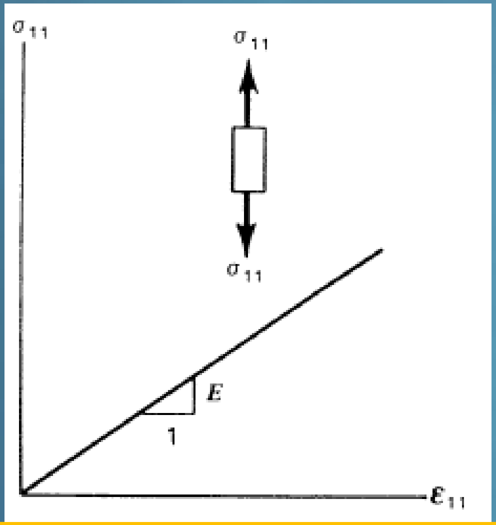
$$k = -\frac{p}{\varepsilon_{kk}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$



k - Módulo volumétrico

Tração uniaxial:

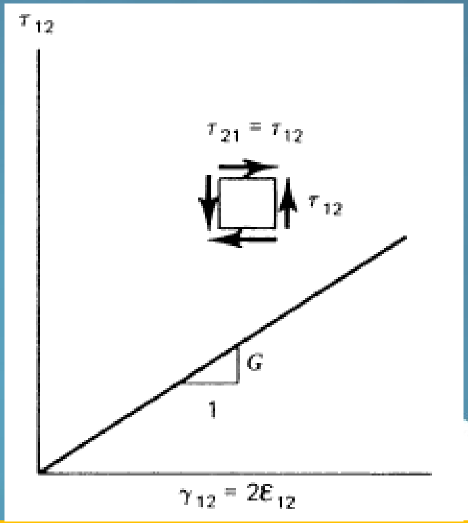
$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \qquad \upsilon = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}$$



***E* - Módulo de Young**
υ – coeficiente de Poisson

Corte puro:

$$G = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}}$$



***G* - Módulo de cisalhamento**

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

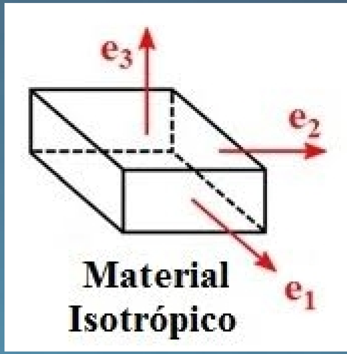
$$\sigma_{ij} = \frac{E}{\left(1+\upsilon\right)}\varepsilon_{ij} + \frac{\upsilon E}{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{\upsilon E}{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\left(1-2\upsilon\right)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{\left(1-2\upsilon\right)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{\left(1-2\upsilon\right)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$C_{ijkl} = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & -\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\upsilon) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\upsilon) & 0 \\ & & & & & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$S_{ijkl} = -\frac{\upsilon}{E}\delta_{ij}\delta_{kl}\,\frac{1+\upsilon}{2E}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

É comum organizar a relação linear elástica entre a tensão e a deformação da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$c_{11}=C_{1111}$

$c_{12}=C_{1122}=C_{2211}$

...

Considerando $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$

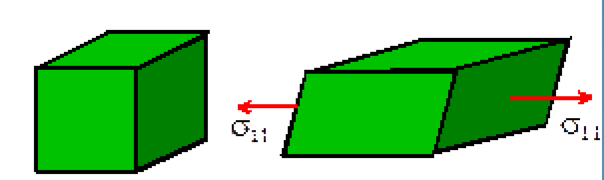
6 componentes independentes

6 componentes independentes

21 componentes independentes

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Para um material anisotrópico, ao aplicar um tensão unidirecional, esta induz deformação linear

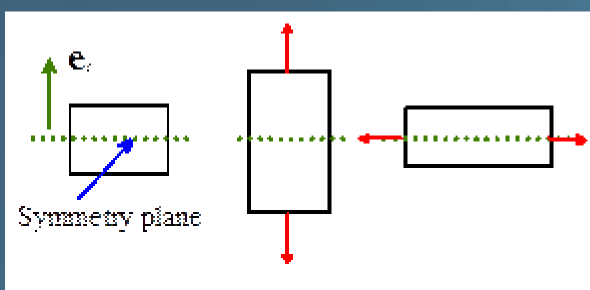


$$\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} \quad \varepsilon_{21} = S_{12}\sigma_{11} \quad \varepsilon_{33} = S_{13}\sigma_{11}$$
$$\varepsilon_{23} = S_{14}\sigma_{11} \quad \varepsilon_{13} = S_{15}\sigma_{11} \quad \varepsilon_{12} = S_{16}\sigma_{11}$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

- **para um plano de simetria $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 13 constantes elásticas independentes**



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

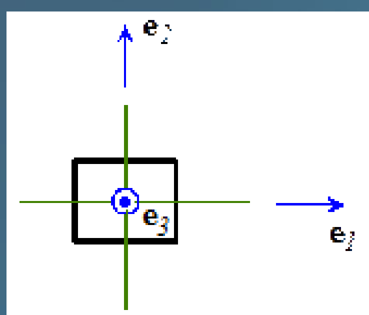
$$c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = 0$$

$$C_{1112} = C_{1113} = C_{2212} = C_{2213} = C_{3312} = C_{3313} = 0$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

- **para um segundo plano de simetria ⇒ terceiro plano de simetria (simetria ortotrópica) ⇒ C_{ijkl} possui 9 constantes elásticas independentes**



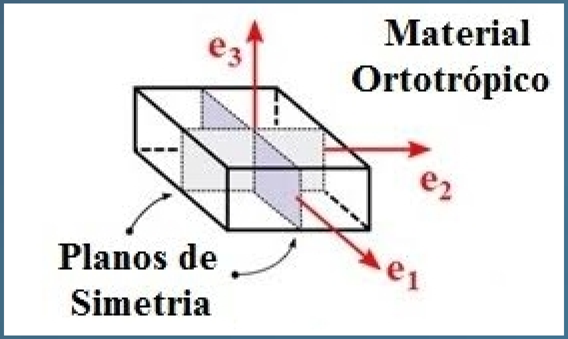
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

- **para um segundo plano de simetria ⇒ terceiro plano de simetria (simetria ortotrópica) ⇒ C_{ijkl} possui 9 constantes elásticas independentes**



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{21}/E_2 & -\upsilon_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_2 & -\upsilon_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ & & & & 1/\mu_{13} & 0 \\ & & & & & 1/\mu_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

- **para um segundo plano de simetria ⇒ terceiro plano de simetria (simetria ortotrópica) ⇒ C_{ijkl} possui 9 constantes elásticas independentes**

$$E_1 = \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right)$$

$$E_2 = \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right)$$

$$E_3 = \left(c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{23}c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2 \right) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right)$$

$$\upsilon_{21} = \left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23} \right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right) \quad \upsilon_{12} = \left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23} \right) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right)$$

$$\upsilon_{31} = \left(c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23} \right) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right) \quad \upsilon_{13} = \left(c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23} \right) / \left(c_{22}c_{33} - c_{23}^2 \right)$$

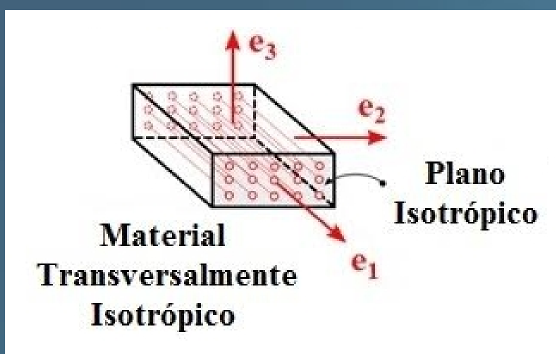
$$\upsilon_{23} = \left(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13} \right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 \right) \quad \upsilon_{32} = \left(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13} \right) / \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \right)$$

$$\mu_{23} = c_{44} \quad \mu_{13} = c_{55} \quad \mu_{12} = c_6$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

- **para material transversalmente isotrópico $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 5 constantes elásticas independentes**



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_p & -\upsilon_p/E_p & -\upsilon_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_p & -\upsilon_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_t & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/\mu_t & 0 & 0 \\ & & & & 1/\mu_t & 0 \\ & & & & & 1/\mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Materiais com simetria de propriedades

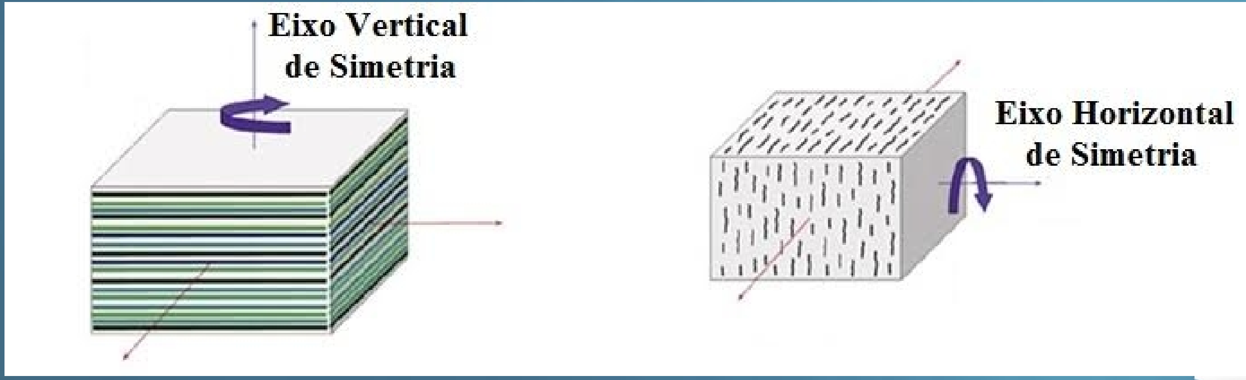
- **para material transversalmente isotrópico ⇒ C_{ijkl} possui 5 constantes elásticas independentes**

$$E_p = \left(c_{11}^2 c_{33} + 2c_{13}^2 c_{12} - 2c_{11}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2\right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2\right)$$

$$E_t = \left(c_{11}^2 c_{33} + 2c_{13}^2 c_{12} - 2c_{11}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2\right) / \left(c_{11}^2 - c_{13}^2\right)$$

$$\upsilon_p = \left(c_{12}c_{33} - c_{13}^2\right) / \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2\right) \quad \upsilon_{tp} = \left(c_{13}c_{11} - c_{12}c_{13}\right) / \left(c_{11}^2 - c_{12}^2\right)$$

$$\mu_p = E_p / 2\left(1+\upsilon_p\right) \quad \mu_t = E_t / 2\left(1+\upsilon_t\right)$$



RELAÇÃO LINEAR ELÁSTICA ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

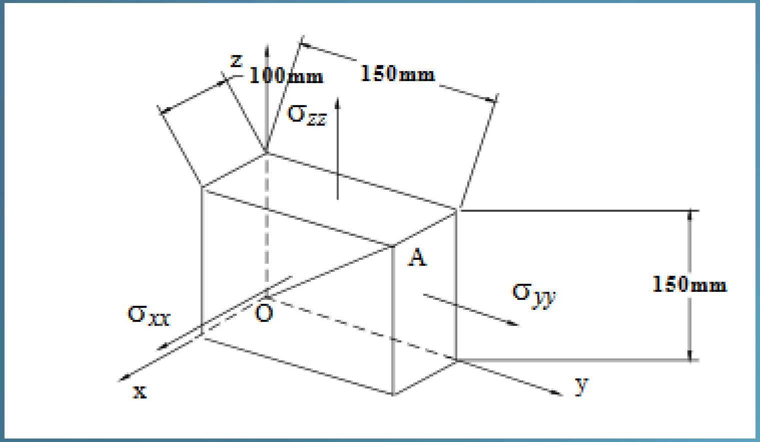
Materiais com simetria de propriedades

- **para um plano de simetria $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 13 constantes elásticas independentes**
- **para um segundo plano de simetria $\Rightarrow$ terceiro plano de simetria (simetria ortotrópica) $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 9 constantes elásticas independentes**
- **para material transversalmente isotrópico $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 5 constantes elásticas independentes**
- **para simetria cúbica $\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 3 constantes elásticas independentes**
- **para material isotrópico (independente da direção) $\Rightarrow$**

$\Rightarrow$ C_{ijkl} possui 2 constantes elásticas independentes

EXERCÍCIO 1

Num paralelepípedo de aço extraído (isotrópico) de um sólido as tensões atuantes nas faces do paralelepípedo são: σ_{xx}= 85 MPa, σ_{yy}= 60 MPa e σ_{zz}= 85 MPa. Considere E=210 GPa e υ=0.3.



Determine as dimensões finais do paralelepípedo e os ângulos entre as faces

EXERCÍCIO 2

Para um dado material isotrópico linear, o tensor de tensões num dado ponto P é o seguinte:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -8 \\ 1 & -6 & 6 \\ -8 & 6 & 20 \end{bmatrix} \text{ksi}$$

Considere E=30000 ksi e υ=0.3.

Determine:

(a)O tensor de desviador de deformações infinitesimais

(b)A densidade de energia de deformação U acumulada

(c)As direções principais para a deformação e para a tensão

EXERCÍCIO 3

Para um dado material ortotrópico linear, o tensor de tensões num dado ponto P é o seguinte:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 800 & -100 & 50 \\ -100 & 80 & 120 \\ 50 & 120 & -200 \end{bmatrix} \text{psi}$$

Considere: E_x=2.18x10^6 psi, E_y/E_x=0.064 , E_z/E_x=0.109 , υ_{xy}=0.18, υ_{yz}=0.12, υ_{zx}=0.13, G_{xy}/E_x=0.041, G_{yz}/E_x=0.017, G_{zx}/E_x=0.057 .

Determine:
(a)O tensor de deformações infinitesimais
(b)A densidade de energia de deformação U acumulada
(c)As direções principais para a deformação e para a tensão

EXERCÍCIO 4

Demonstre que para um material ortotrópico linear, se os eixos das tensões principais são perpendiculares aos planos de simetria do material, então, os eixos principais de deformação coincidem com os de tensão.