Operações com funções deriváveis

Lema. $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$. Então f é derivável em $x = c \in (a,b)$ se e só se existe $r \in \mathbb{R}$ e $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua em $x = c$

com $f(x) = f(c) + r(x-c) + \alpha(x)(x-c)$, $x \in (a,b)$

com $\alpha(x) \to 0$ qdo. $x \to c$.

$r = f'(c)$.

OBS: $\alpha(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{(x-c)} - r$, $x \neq c$

$$f(x) - \left(f(c) + r(x-c) \right) = \alpha(x)(x-c)$$

$(\longrightarrow)$ Defina $\alpha : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c), & x \neq c \\[2ex] 0, & x = c \end{cases}$$

$$\lim_{x \to c} \alpha(x) = \overbrace{\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}^{f'(c)} - f'(c) = 0.$$

$\therefore$ α é contínua em $x = c$.

$$(\Leftarrow) \quad f(x) = f(c) + r(x-c) + \alpha(x)(x-c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = r + \alpha(x), \quad x \neq c.$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = r + \cancelto{0}{\lim_{x\to c}\alpha(x)}$$

$$\therefore \quad f'(c) = r.$$

Proposição: Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I.

Então: (1) $f+g$ e fg são deriváveis com

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{e} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

dem. $h(x) = f(x) + g(x)$ e seja $c \in I$.

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)+g(x)-f(c)-g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = f'(c) + g'(c)$$

$$= h'(c).$$

$h(x) = f(x)g(x), \quad c \in I \qquad \pm f(c)g(x)$

$$\lim_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\big(f(x) - f(c)\big)g(x)}{x - c} + f(c) \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{f'(c)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to c} g(x)}_{g(c)} + f(c)\, g'(c)$$

$$= f'(c)\, g(c) + f(c)\, g'(c) \qquad \blacksquare$$

Lema. Seja f derivável em $x=c$ com $f(c)\neq 0$. Então $1/f$ é derivável em $x=c$ e $\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -\frac{f'(c)}{f(c)^2}$.

<u>dem</u>. $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)}\right)$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(c) - f(x)}{f(x)f(c)} \frac{1}{(x-c)} = -\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \frac{1}{f(x)f(c)}$$

$$= -f'(c)\cdot\frac{1}{f(c)^2}.$$

$\blacksquare$

(iii) Suponha ainda que $g(c) \neq 0$. Então f/g é derivável em $x=c$ com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(c).$$

Exercício.

Exemplo

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)' \quad , \; n \text{ inteiro positivo}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$= (a_0)' + (a_1 x)' + \ldots + (a_n x^n)'$$

$$= 0 + a_1 + \ldots + a_n n x^{n-1}$$

OBS: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ p, q polinomios. Se $q(c) \neq 0$, $\left(\dfrac{p}{q}\right)'(c) = \dfrac{p'(c)\,q(c) - p(c)\,q'(c)}{q(c)^2}$.

Regra da Cadeia. Sejam $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$, $g:(c,d) \mapsto \mathbb{R}$ com $f((a,b)) \subset (c,d)$. Suponha f derivável em $x_0 \in (a,b)$ e g derivável em $f(x_0)$. Então

$g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é derivável com

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

cont. em $f(x_0)$

<u>dem</u>. g derivável em $f(x_0)$ implica que

$$g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + \alpha(y)(y - f(x_0))$$

$\forall\, y \in (c,d)$ com $\alpha(y) \to 0$ qdo $y \to f(x_0)$.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \alpha(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{f'(x_0)} + \overbrace{\alpha(f(x))}^{\alpha(f(x_0)) \to 0} \overbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{f'(x_0)}$$

q.do $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Exemplos 1) $g(x) = x^{m/n}$, m, n inteiros positivos, $x > 0$.

$$g(x) = (u \circ v)(x) \quad \text{com} \quad u(y) = y^{m} \text{ e } v(x) = x^{1/n}.$$

$$g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = m\left(x^{1/n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

$$v'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} \qquad u'(y) = m y^{m-1}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1+1-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

2) $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = ?$ $\qquad f(x) = (u \circ v)(x)$

$\sqrt{x^2+1} = f(x)$

$u(y) = \sqrt{y} \qquad v(x) = x^2+1 \geq 1$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$u'(y) = \left(y^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} y^{1/2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$v'(x) = 2x$$