

# Equações de Maxwell

- ⚡ Leis de Maxwell macroscópicas
- ⚡ Condições de contorno
- ⚡ Supercondutores

# As equações do eletromagnetismo

- As leis da Eletrodinâmica, como reunidas por Maxwell, são escritas, de um modo geral, como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

(Lei de Gauss para o campo elétrico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(Lei de Gauss para o campo magnético)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(Lei de Ampère)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Lei de Faraday)

- No caso de relações constitutivas lineares temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{J}$$

, onde  $c_s^2 = 1/(\mu\epsilon)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Equações macroscópicas

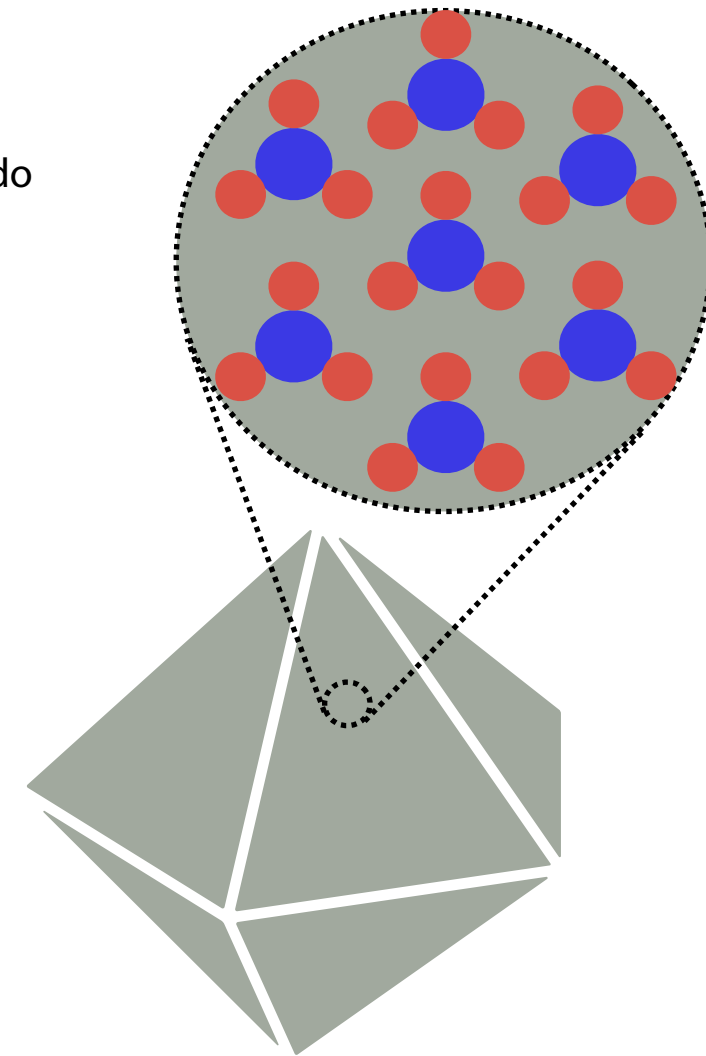
- Podemos considerar as Equações de Maxwell em meios materiais sob uma perspectiva um pouco diferente do que fizemos até agora. Imagine que os campos existem em uma região contendo átomos e moléculas que podem se mover, se “reconfigurar”.
- Os tamanhos típicos desses átomos e moléculas são da ordem de  $10^{-16}$  a  $10^{-12}$  m, e as escalas de tempo podem ser estimadas em termos dos modos vibracionais, que têm períodos são por volta de  $10^{-12}$  s ou até menos do que isso.
- Essas são escalas muito pequenas, e frequências muito altas, para que possamos medir qualquer coisa com tamanha resolução. Sendo assim, o que nos interessa são as **médias espaciais e temporais** dos observáveis físicos.
- Vamos definir essas médias no espaço e no tempo em termos de “janelas”, ou “filtros”:

$$\langle f \rangle_V = \int dV' W_V(\vec{x}, \vec{x}') f(t, \vec{x}') \quad \text{e}$$

$$\langle f \rangle_T = \int dt' W_T(t, t') f(t', \vec{x})$$

- Aqui, as janelas espacial ( $W_V$ ) e temporal ( $W_T$ ) definem intervalos dentro dos quais fazemos uma média de todas as grandezas físicas. Por simplicidade, geralmente tomamos janelas normalizadas:

$$\int dV' W_V(\vec{x}, \vec{x}') = 1 \quad , \quad \int dt' W_T(t, t') = 1$$



# Equações macroscópicas

- Aqui vemos uma representação dessas funções-janela, e como elas agem numa função cuja média queremos tirar.
- Em cada posição, nós calculamos a média ponderada da integral acima, e o resultado é uma função “suavizada”.
- Uma dessas funções-janela que podemos considerar é uma função Gaussiana:

$$W_T(t, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}} e^{-(t-t')^2/2\Delta T^2} \quad , \quad \text{e sua generalização para 3D:}$$

$$W_V(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(\pi R^2)^{3/2}} e^{-|\vec{x}-\vec{x}'|^2/R^2}$$

- A ideia agora é que podemos definir quantidades microscópicas  $f(x)$ , e macroscópicas,  $F(x) = \langle f \rangle(x)$ , para tudo: cargas, correntes, campos e assim por diante. Temos então:

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle_{V,T} \quad , \quad \rho = \langle \eta \rangle_{V,T} \quad ,$$

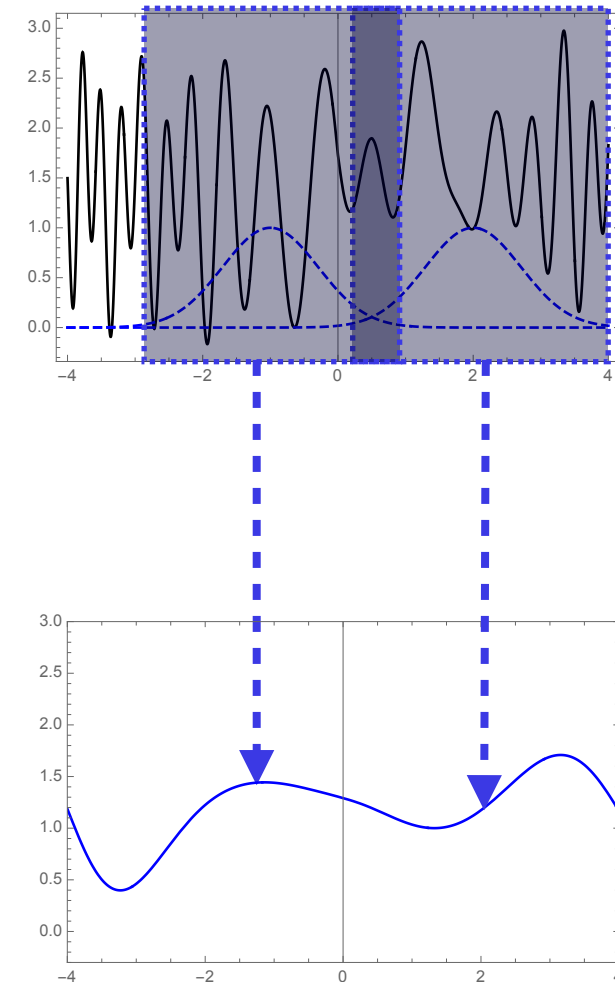
$$\vec{B} = \langle \vec{b} \rangle_{V,T} \quad , \quad \vec{J} = \langle \vec{j} \rangle_{V,T} \quad .$$

- É claro que as equações de Maxwell devem ser válidas no sentido “microscópico”: afinal, os átomos e moléculas estão no vácuo. Tomando a média dessas equações nos leva a equações macroscópicas. Por exemplo, a Lei de Gauss fica:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \eta \quad \longrightarrow \quad \langle \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle = \langle \eta \rangle = \rho$$

Como o divergente da média é a média do divergente (demonstre isso!), temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle_V &= \int dt' W_T(t, t') \int dV' W_V(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{e}(t', \vec{x}') = \vec{\nabla} \cdot \int dt' W_T(t, t') \int dV' W_V(\vec{x}, \vec{x}') \vec{e}(t', \vec{x}') \\ &= \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{e} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$



# Equações macroscópicas

- Os operadores diferenciais comutam com as integrais das médias, de modo que obtemos equações “macroscópicas”:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \langle \eta \rangle \quad , \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \langle \vec{j} \rangle$$

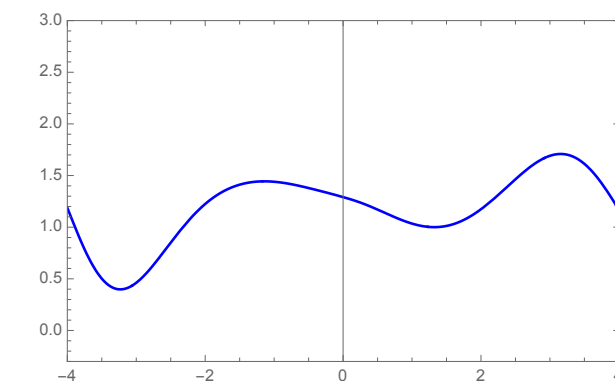
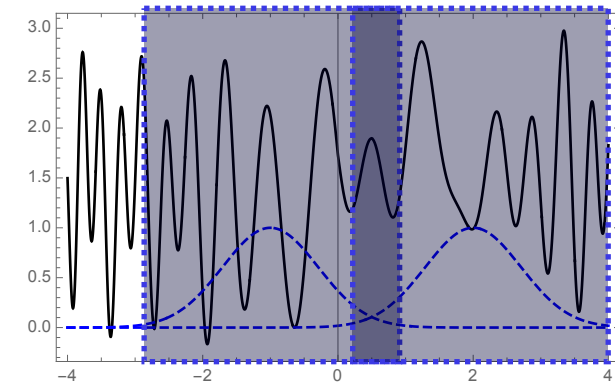
- Agora eu vou mostrar a vocês que essa média sobre as fontes leva precisamente ao tipo de termos que vimos antes: dipolos elétricos como “cargas de polarização”, e dipolos magnéticos como “correntes de magnetização”.
- A maneira mais simples de mostrar isso é por meio do **Teorema da Convolução**, que vocês talvez tenham visto em Física Matemática. Esse teorema afirma que, dadas duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  em  $\mathbb{R}$ , com **transformadas de Fourier** dadas por:

$$\tilde{f}(k) = \int dx e^{ikx} f(x) \quad \leftrightarrow \quad f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{f}(k) \quad , \quad (\text{e o mesmo para } g),$$

então a integral:

$$\begin{aligned} \int dx f(x) g(x) &= \int dx \left( \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{f}(k) \right) \left( \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'x} \tilde{g}(k') \right) \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') \int dx e^{-i(k+k')x} = \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') 2\pi \delta(k+k') \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}^*(k) \end{aligned}$$

onde na última igualdade eu tomei as funções como sendo reais, ou que implica que  $\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k)$ .



# Equações macroscópicas

- O legal dessa expressão é que, como a função-janela é “suave” (ela varia pouco dentro da “janela”), o efeito da janela é **suprimir os modos de Fourier maiores** (ou seja, comprimentos de onda menores), de modo que podemos aproximar a expressão por:

$$\langle f \rangle = \int dx f(x) W(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{W}^*(k) \simeq \int \frac{dk}{2\pi} \left[ \tilde{f}(k=0) + k \left. \frac{d\tilde{f}}{dk} \right|_{k=0} + \dots \right] \tilde{W}^*(k)$$

- Por exemplo, funções-janela Gaussianas em 1D e 3D têm transformadas de Fourier:

$$W_T(t, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}} e^{-(t-t')^2/2\Delta T^2} \longleftrightarrow \tilde{W}_T(\omega) = e^{-\omega^2 T^2/2}$$

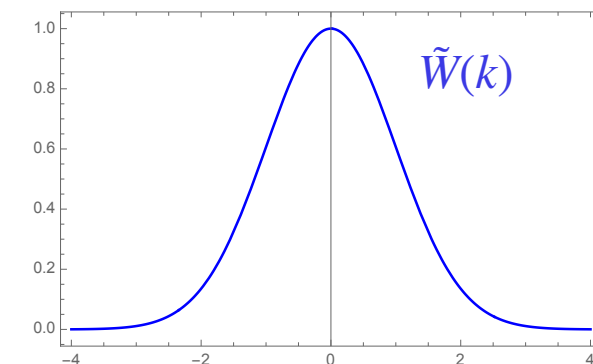
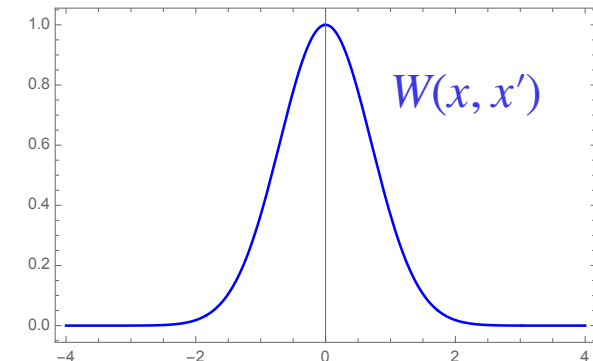
$$W_V(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(\pi R^2)^{3/2}} e^{-|\vec{x}-\vec{x}'|^2/R^2} \longleftrightarrow \tilde{W}_V(\vec{k}) = e^{-k^2 R^2/4}$$

- Tipicamente, uma média espacial já é suficiente para chegar em equações macroscópicas, então vamos calcular a média da densidade de cargas, por exemplo:

$$\langle \eta \rangle_V(\vec{x}) = \int d^3x' \eta(\vec{x}') W_V(\vec{x}, \vec{x}') = \int d^3x' \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \tilde{\eta}(\vec{k}) \right] \left[ \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \tilde{W}_V(\vec{k}') \right]$$

$$\langle \eta \rangle_V(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\eta}(\vec{k}) \tilde{W}^*(\vec{k})$$

- A ideia agora é usar o fato de que a função-janela “mata” os modos  $k$  maiores, e portanto podemos fazer uma expansão de Taylor em  $k$ .



# Equações macroscópicas

- Porém, temos de tomar alguns cuidados com a expressão acima. Note, em particular, que a transformada de Fourier:

$$F[f(x + \Delta x)](k) = \int dx e^{ikx} f(x + \Delta x) = \int dx e^{ikx} \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'(x+\Delta x)} \tilde{f}(k') = e^{-ik\Delta x} \tilde{f}(k)$$

- Portanto, num certo sentido essa é uma expansão em torno de uma **região perto da origem** (que, claro, podemos situar em qualquer lugar). Temos então, numa região  $\vec{x}$  próxima da origem:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle_V(\vec{x}) &\simeq \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( 1 - i \vec{k} \cdot \vec{x} + \dots \right) \tilde{\eta}(\vec{k}) \tilde{W}^*(\vec{k}) \\ &\simeq \langle \eta \rangle_V(0) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( -i \vec{k} \cdot \vec{x} \right) \tilde{\eta}(\vec{k}) \tilde{W}^*(\vec{k}) + \dots \\ &\simeq \langle \eta \rangle_V(0) - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{x} \cdot \vec{k} \tilde{\eta}(\vec{k}) \tilde{W}^*(\vec{k}) + \dots \end{aligned}$$

Agora podemos voltar ao espaço "real", notando que  $\vec{k} \leftrightarrow -i \vec{\nabla}_x$ , e portanto:

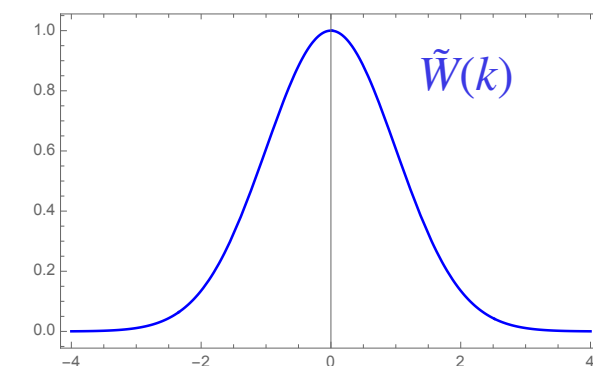
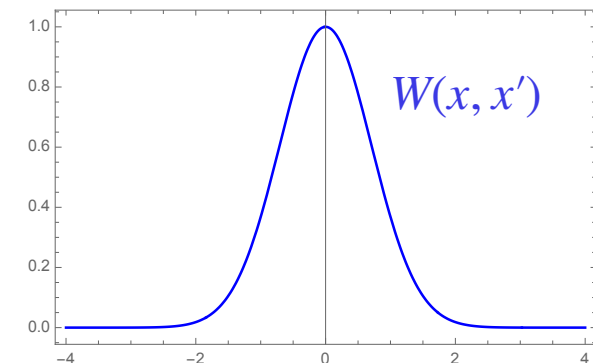
$$\langle \eta \rangle_V \simeq \langle \eta \rangle_V(0) - \int d^3x' \vec{x}' \cdot \left[ \vec{\nabla}' \eta(\vec{x}') \right] W(\vec{x}') + \dots$$

- Para simplificar essa expressão, calcule a seguinte média:

$$\langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \eta \rangle = \langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla} (\eta - \eta_0) \rangle \quad , \quad \text{onde } \eta_0 = \langle \eta \rangle \text{ é a densidade média}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \eta \rangle = \langle \vec{\nabla} \cdot [\vec{x}(\eta - \eta_0)] - 3(\eta - \eta_0) \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{x}(\eta - \eta_0) \rangle - 0 \quad , \quad \text{pois } \vec{\nabla} \cdot \vec{x} = 3 \text{ e } \langle \eta \rangle = \eta_0 .$$

Agora, note que o que restou do lado direito é o divergente de um **dipolo**,  $\langle \vec{x}(\eta - \eta_0) \rangle$  (lembre-se,  $\eta$  é a densidade microscópica!)



# Equações macroscópicas

- Portanto, obtemos que a densidade macroscópica de cargas ao redor da origem pode ser expressa como:

$$\langle \eta \rangle_V(\vec{x}) \simeq \langle \eta \rangle_V - \vec{\nabla}_x \cdot \langle \vec{x}(\eta - \eta_0) \rangle_V + \dots = \langle \eta \rangle_V - \vec{\nabla}_x \cdot \langle \vec{p} \rangle_V + \dots,$$

onde  $\vec{p}$  é o dipolo "macroscópico", e ambas as expressões são válidas numa vizinhança de  $\vec{x} = 0$ .

- Mas, como vimos acima, essa origem é arbitrária: ela poderia ser qualquer ponto! Portanto, para **qualquer posição**:

$$\langle \eta \rangle_V(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_x \cdot [\langle \vec{p} \rangle_V(\vec{x})] + \dots$$

Agora podemos interpretar a **densidade de cargas macroscópica**  $\rho$  como o limite de "baixa frequência/grandes escalas" da densidade microscópica de cargas; a primeira correção é o **gradiente** dessa densidade de cargas, ou seja, o **dipolo elétrico**. [Para mais detalhes, veja Jackson, Cap. 6.6.]

- Essa é a razão por trás da definição, na Lei de Gauss :

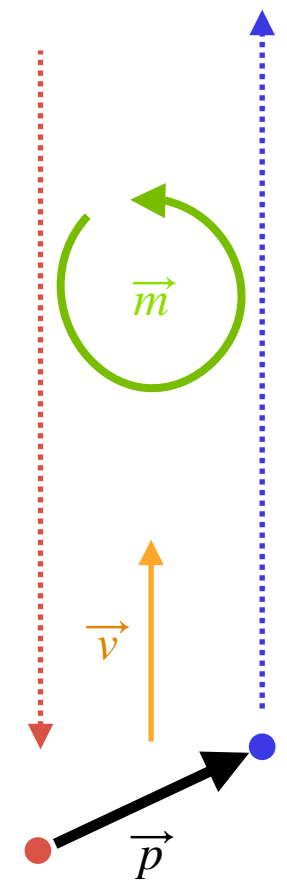
$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \langle \eta \rangle = \rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_x \cdot \vec{P}(\vec{x}) + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho(\vec{x}) + \dots$$

- Um cálculo análogo, porém um pouco mais complexo, leva a uma expressão para a Lei de Ampère macroscópica como:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} = \vec{M} + (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) \times \vec{v} + \dots$$

Além da magnetização média  $\vec{M}$ , o último termo é muito interessante: ele nos diz que, se o material está em movimento, então uma polarização elétrica do campo também pode servir como fonte do campo magnético (ela age como um dipolo magnético adicional). De fato, isso é mais uma evidência da corrente de deslocamento de Maxwell: um dipolo elétrico que se move gera um campo magnético!





# Condições de contorno

- Vamos re-escrever as leis da Eletrodinâmica:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \text{(ii)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(iii)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(iv)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

- Usando volumes muito finos, com faces ("tampas") paralelas à interface, de área  $A$ , temos que:

$$\text{(i)} \quad \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{D} = Q \quad \Rightarrow \quad AD_{\perp}^{cima} - AD_{\perp}^{baixo} = A\sigma \quad \Rightarrow \quad \Delta D_{\perp} = \sigma \quad (\sigma \text{ é a } \textbf{densidade superficial de cargas})$$

$$\text{(ii)} \quad \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta B_{\perp} = 0$$

- Usando um circuito muito estreito, com lados paralelos à interface de comprimento  $L$ , temos que:

$$\text{(iii)} \quad \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

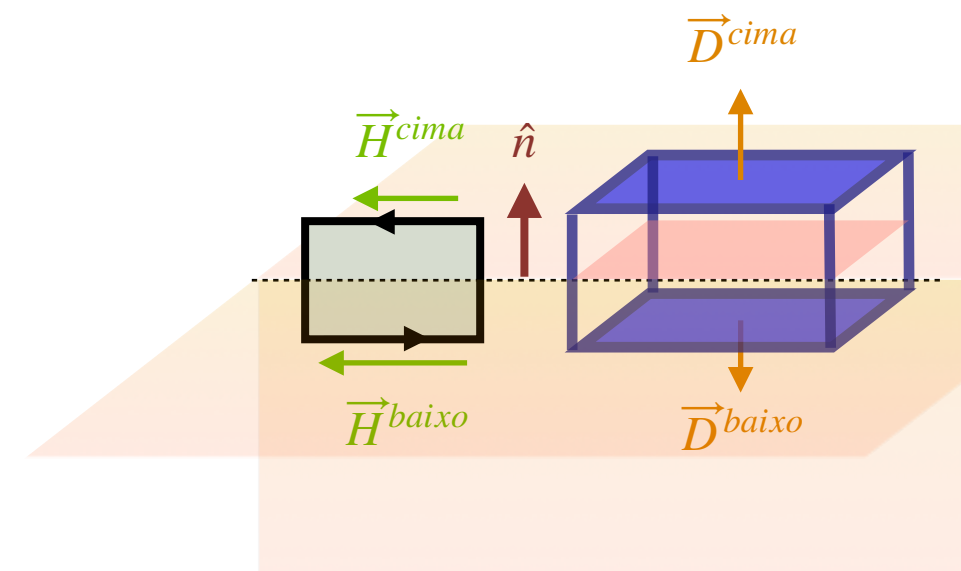
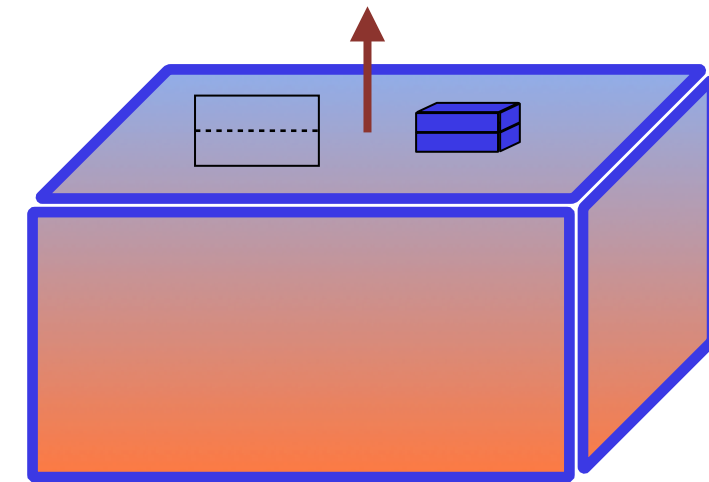
$$\text{Mas se } \partial \vec{B} / \partial t \text{ é contínuo ao longo da superfície} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{E}_{\parallel} = 0$$

- Ainda usando esse circuito, temos que:

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

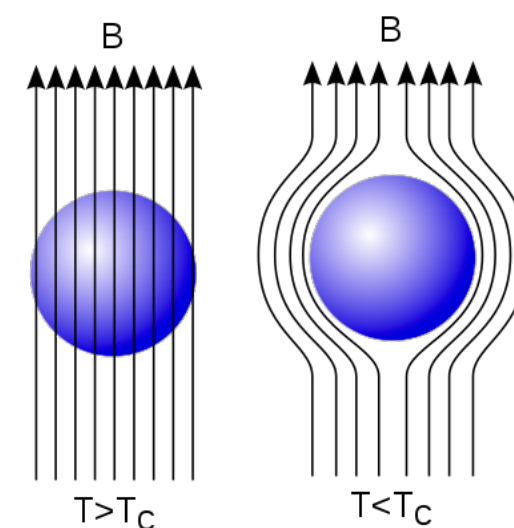
Novamente, se  $\partial \vec{D} / \partial t$  for contínuo, sobra apenas a parte em  $\vec{J}$  que, conforme já vimos, nos dá que

$$\Delta \vec{H}_{\parallel} = \vec{K} \times \hat{n}, \quad \text{onde } \vec{K} \text{ é a } \textbf{corrente superficial}.$$



# Supercondutividade

- Em 1911 Kammerlingh Onnes descobriu que, ao resfriar Mercúrio com Hélio líquido até uma temperatura próxima do zero absoluto (uma técnica que havia acabado de ser inventada), a **resistência elétrica** daquele elemento parecia tender a **zero** — ou seja, a condutividade se tornava praticamente infinita. (Por sinal, Onnes também foi o primeiro a observar a superfluidez, mas isso só foi percebido 100 anos depois!)
- Em 1933, Meissner e Ochsenfeld mostraram que, ao se tornar supercondutor (ou seja, quando o material é resfriado abaixo de uma certa **temperatura crítica**), os materiais **expellem** do seu interior todo o **campo magnético**.
- Já nessa época se sabia que a passagem para o estado supercondutor era uma **transição de fase**, mas não se sabia muito bem como, nem por quê. Foi preciso a **Mecânica Quântica** para explicar esse efeito — e, de certo modo, a teoria da supercondutividade está intimamente ligada às origens da Teoria Quântica de Campos!
- Eu não vou dar aqui essa explicação final para a supercondutividade — isso é assunto para cursos mais avançados. Mas eu vou apresentar uma teoria fenomenológica, puramente clássica, que funciona até certo ponto: a **teoria de London** (de 1935, devida aos irmãos Fritz e Heinz London)



# Supercondutividade

- Vamos tomar a força elétrica numa carga  $e$ :

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E}$$

(Note que num supercondutor essa força não encontra nenhuma resistência, então não chegamos num “regime estacionário” tal que  $\vec{J} \rightarrow \sigma \vec{E}$  !)

- A densidade de corrente, por outro lado, é dada por:

$$\vec{J} = n_S e \vec{v} \quad , \quad \text{onde } n_S \text{ é a densidade volumétrica de cargas supercondutoras (ou seja, } \rho_S = n_S e \text{ ).}$$

- Assumindo que essa densidade de cargas não varia muito rápido com o tempo, podemos escrever:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = n_S e \frac{d\vec{v}}{dt} = n_S \frac{e^2}{m_e} \vec{E}$$

- Agora, tomando o rotacional dessa equação, e usando a Lei de Faraday,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , temos:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -n_S \frac{e^2}{m_e} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Portanto, a menos de algum termo transiente, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = -n_S \frac{e^2}{m_e} \vec{B}$$

# Supercondutividade

- Temos então uma equação que lembra a Lei de Ampère “ao contrário”:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = -n_S \frac{e^2}{m_e} \vec{B}$$

- Note que a Lei de Ampère é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad , \quad \text{onde desprezamos o termo da corrente de deslocamento, que de fato é muito pequeno nessas situações.}$$

- Substituindo a Lei de Ampère com  $\mu \vec{H} = \vec{B}$  na equação acima temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -n_S \frac{e^2}{m_e} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\frac{n_S e^2}{\mu m_e} \vec{B}$$

- Mas como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , obtemos a equação:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{n_S e^2}{\mu m_e} \vec{B}$$

- Com uma interface em 1D, as soluções são do tipo exponencial, e claramente a única solução que satisfaz as condições de contorno é do tipo:

$$B \sim e^{-|z|/\lambda} \quad , \quad \text{onde o comprimento de penetração } \lambda = \sqrt{\frac{n_S e^2}{\mu m_e}}.$$

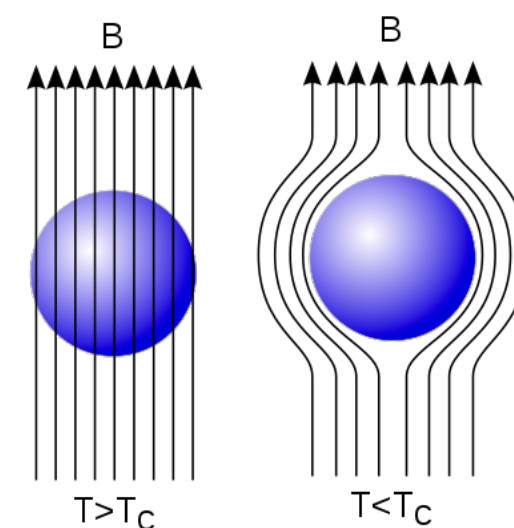
---

# Supercondutividade

- Esse comprimento de penetração  $\lambda$  é algo da ordem de  $\sim 10^2$  nm, o que significa que o campo magnético dentro de um material sem nenhum tipo de resistência seria exponencialmente suprimido.
- Essa lei fenomenológica tem vários problemas: por exemplo, ela não explica o que é essa densidade de cargas supercondutoras,  $n_S$ .
- Além disso, as Equações de London não dão nenhuma luz sobre a natureza da **transição de fase** que ocorre nos materiais quando a temperatura cai abaixo da temperatura crítica. Ela também não explica por quê um campo magnético suficientemente forte (o **campo crítico**) pode fazer com que um material deixe de ser supercondutor.
- Em outras palavras: a Teoria de London não explica a natureza ou a origem da supercondutividade.
- Para isso, foi preciso aguardar até 1957, quando Bardeen, Cooper e Schrieffer mostraram que a supercondutividade é um efeito puramente quântico, que ocorre quando pares de elétrons formam um estado ligado (os **pares de Cooper**), e desacoplam da estrutura cristalina dos materiais, deixando assim de sentir qualquer tipo de resistência.
- Na linguagem da Mecânica Quântica, esses pares são estados coerentes de spin zero, que formam um **condensado de Fermi-Dirac**.

# Supercondutividade

- Note que o Efeito Meissner (a expulsão dos campos magnéticos do interior de um supercondutor, quando esse é resfriado abaixo da temperatura crítica) **não é uma consequência simples da Lei de Indução de Faraday**: o campo magnético permanece **estático**, portanto não há indução!
- O Efeito Meissner é uma consequência da Equação de London, que nos diz que a única solução possível para um campo magnético dentro de um meio supercondutor tem um decaimento exponencial.
- Podemos também pensar no Efeito Meissner em termos da **minimização da energia**: qualquer campo magnético dentro do supercondutor aumentaria dramaticamente a **energia do campo magnético**. Portanto, o sistema físico vai se reorganizar para buscar o estado de menor energia — gerando correntes que expõem o campo magnético de dentro do supercondutor.
- Ou seja, quando **resfriamos** um material (as pastilhas das figuras ao lado) até ele se tornar supercondutor, nas proximidades de um ímã, o campo magnético dentro do material é **expelido**, não por obra da Lei de Faraday, mas devido ao **Efeito Meissner** — ou seja, algo próximo às **Equações de London**.
- Mas quando tentamos **mover a pastilha** para um local mais próximo ou mais distante do ímã e encontramos uma **força que se opõe** a isso, aí sim, estamos lidando com as consequências da **Lei de Faraday**.





# O efeito London

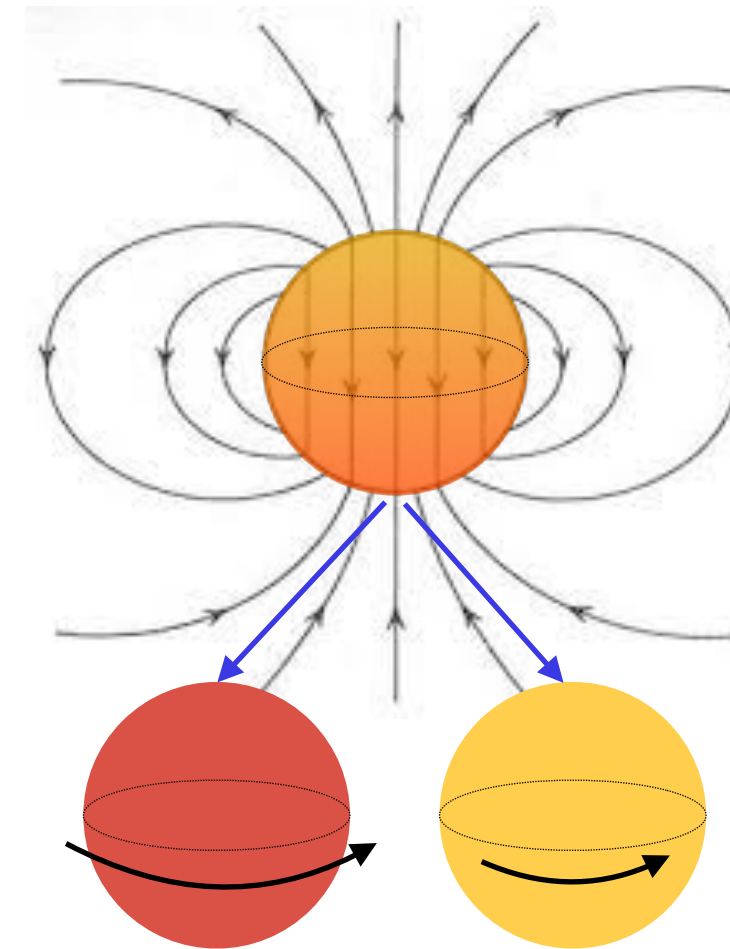
- Se colocamos uma esfera supercondutora para girar, a ausência de interações das cargas supercondutoras com o restante do material significa que as duas partes vão girar com velocidades diferentes.
- Isso significa que um material supercondutor em rotação gera um campo magnético constante dentro dele, e um campo de dipolo magnético fora.
- Porém, essa analogia clássica não é exata, pois o campo dentro do supercondutor não depende da densidade de cargas supercondutoras. De fato, o campo dentro do supercondutor é dado por:

$$\vec{B} = -2\mu_0 \frac{m_e}{e} \vec{\omega} \quad , \quad \text{onde } \vec{\omega} \text{ é a velocidade de rotação angular.}$$

- O momento de dipolo magnético dessa esfera supercondutora é portanto:

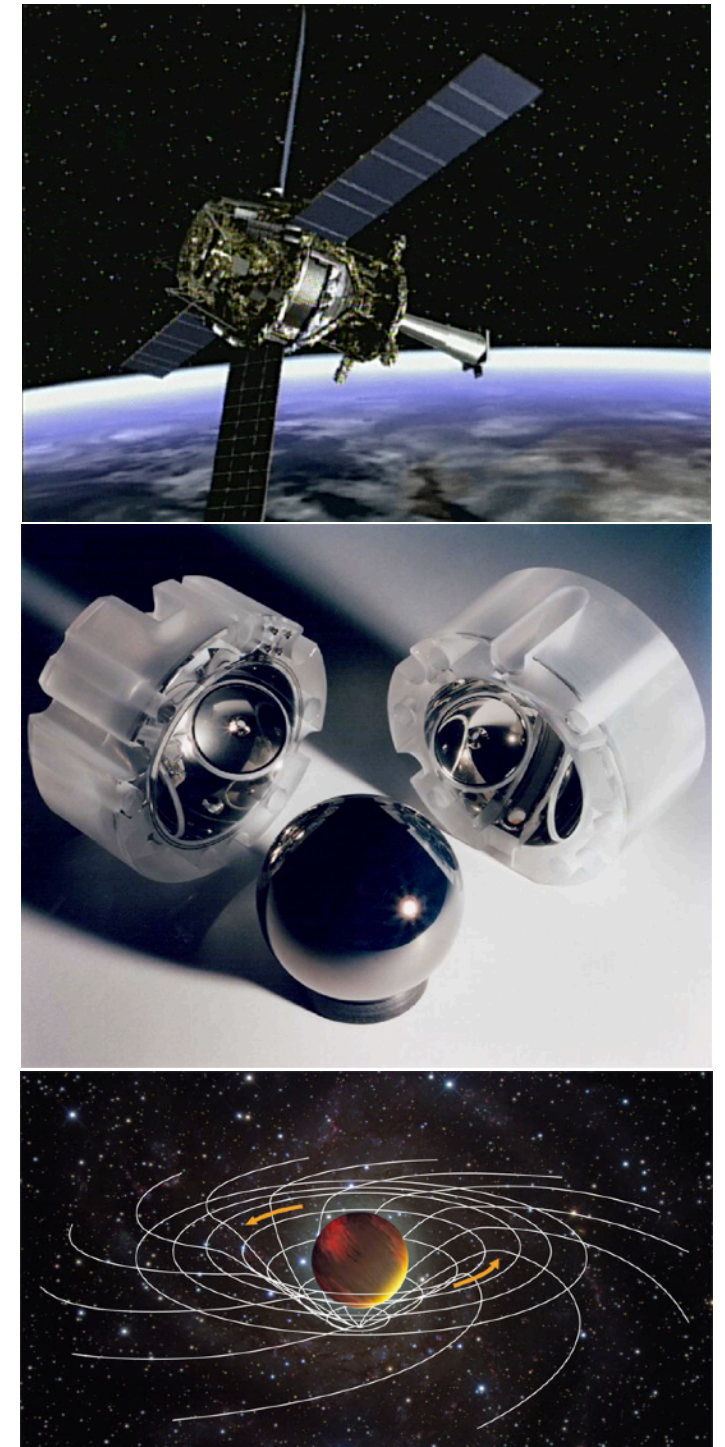
$$\vec{m} = -\mu_0 \frac{m_e}{e} R^3 \vec{\omega}$$

- Mas a analogia clássica acima é falha: de fato, o Efeito London é um efeito quântico, que não pode ser explicado por meio da física clássica.



# O efeito London

- O Efeito London foi utilizado no passado recente para construir o giroscópio mais preciso da história, que foi colocado num satélite chamado Gravity Probe B.
- Esse giroscópio tinha o objetivo de confirmar uma das previsões mais interessantes da Relatividade Geral: a de que mesmo a Gravitação possui um caráter “magnético”, relacionado à rotação da Terra!
- O Gravity Probe B comprovou o efeito do “arrasto de referenciais” que ocorre nas proximidades de um corpo (no caso, a Terra) que gira com uma certa velocidade angular.
- Segundo a Relatividade Geral, a gravidade não tem apenas uma componente “elétrica” (que é radial, e cai como  $\sim 1/r^2$ ), mas também uma componente “magnética”, ligada à **rotação**.
- O Gravity Probe B comprovou esse caráter “magnético” (que é muito, *muito* pequeno!) e é mais um dos testes pelos quais a Relatividade Geral passou.





---

# Próxima aula:

- Prova! Dia 12/11 (próxima sexta-feira!)
- E depois...
- Eletrodinâmica: ondas, radiação, etc. e tal
- Leitura: Griffiths, Caps. 4-8
- Leitura complementar: Jackson, Caps. 4-6