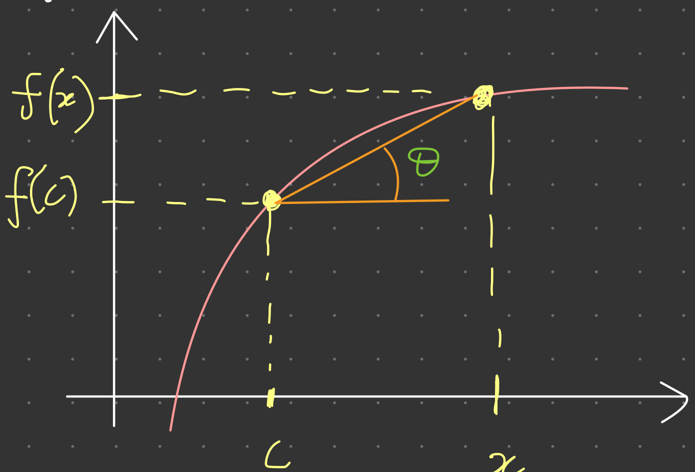
A derivada de uma função

Seja $f:(a,b) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e considere $q(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, $x \in (a,b) / \{c\}$ para algum $c \in (a,b)$.



$q(x) = \tan \theta$

OBS: $q(x)$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pts. $(x, f(x))$ e $(c, f(c))$ cuja equação é:

$$y = q(x)(x - c) + f(c).$$

$q(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}, \; x \in (a,b) / \{c\}$

(i) Se $q(x)$ possui limite à direita em c dizemos que f é derivável à direita em $x = c$ e denotamos $f'_+(c) = \lim\limits_{x \to c+} q(x)$.

(ii) Se $q(x)$ possui limite à esquerda em c dizemos que f é derivável à esquerda em $x = c$ com $f'_-(c) = \lim\limits_{x \to c-} q(x)$.

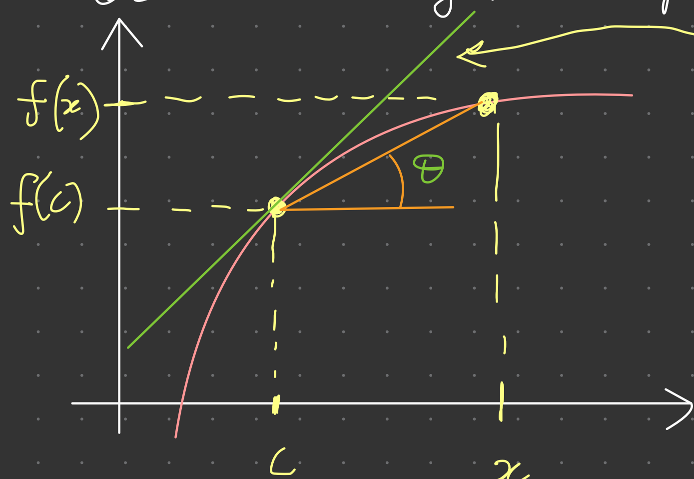
(iii) Dizemos que f é derivável em $x = c$ se é derivável à esquerda e direita em $x = c$ com $f'_+(c) = f'_-(c)$.

Nesse caso temos $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} q(x)$.

Interpretação geométrica

$q(x)$ é o coeficiente angular da reta que passa nos pontos $\begin{cases} (x, f(x)) \\ (c, f(c)) \end{cases}$

Qdo $x \to c$, $q(x) \to f'(c)$ o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$.



Equação da reta tangente

$$y = f'(c)(x-c) + f(c)$$

$$\tan\theta = q(x)$$

Interpretação cinemática

Consideramos uma partícula deslocando-se sobre uma reta.

Definimos $f:[0,T]\longmapsto \mathbb{R}$ a função que para cada instante $t\in[0,T]$ dá a posição da partícula sobre a reta $\mathbb{R}$.

$(c\in(0,T))$

A razão incremental $\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c}$ representa a velocidade média da partícula no trecho entre $f(t)$ e $f(c)$.

$$f'(c)=\lim_{t\to c}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}$$ é a velocidade instantânea da partícula.

<u>OBS</u>: A razão incremental também pode ser interpretada como a razão de mudança, a taxa de variação de f em $t=c$.

Exemplos: 1) $f(x) = k$, $x \in (a,b)$. Seja $c \in (a,b)$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = 0.$$

2) $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{mx + \cancel{b} - (mc + \cancel{b})}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{m\cancel{(x - c)}}{\cancel{x - c}} = m.$$

$\therefore$ $f'(c) = m \quad \forall c \in \mathbb{R}.$

3) $f(x) = x^n$, n inteiro positivo, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x^n - c^n}{x - c} = \frac{\cancel{(x-c)}(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1})}{\cancel{x-c}}$$

$$\xrightarrow{x \to c} \underbrace{c^{n-1} + c^{n-1} + \dots + c^{n-1}}_{n\text{-vezes}} = n c^{n-1} = (x^n)'_x \Big|_{x=c}.$$

4) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c}{x - c}$$

$$= \frac{1}{x-c} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right) \cos\left(\frac{x+c}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\left(\frac{x-c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x+c}{2}\right) \to \cos c$$

1    $\cos c$

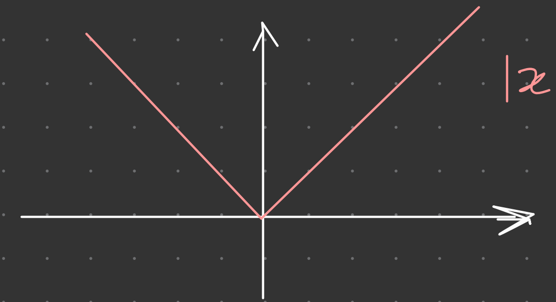
qdo $x \to c$

qdo $x \to c$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\therefore (\operatorname{sen} x)' \Big|_{x=c} = \cos c.$$

5) $f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}$.



$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$c \neq 0 \qquad f'(c) = \begin{cases} 1, & c > 0 \\ -1, & c < 0 \end{cases}$$

Note que $f'(0)$ não existe.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \cancel{\frac{x}{x}}^{\,1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

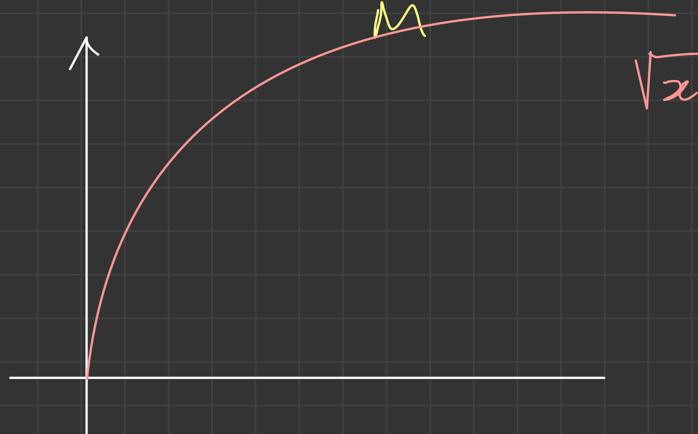
limites laterais diferentes

6) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Note que não faz sentido avaliar $f'(0)$. Mas sim

$$\cancel{f'_+(0)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{pois } \forall M > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > M \iff \frac{1}{M} > \sqrt{x} \iff \frac{1}{M^2} > x, \quad x > 0.$$



$$f(x) = \sqrt{x}, \quad c > 0$$

$$\lim_{x \to c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})}{x - c} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{(\sqrt{x} + \sqrt{c})}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\cancel{x - c}}{\cancel{(x - c)}} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{c})} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad c > 0.$$

Exercício: Veja que: (a) se $f(x) = \cos x$ então

$$f'(c) = -\operatorname{sen} c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) Se $f(x) = x^{1/n}$, n inteiro positivo, então

$$f'(c) = \frac{c^{\frac{1-n}{n}}}{n}.$$

$$x = c + h \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

OBS: Se f é derivável em $x = c$, então f é contínua em c.

Com efeito $f(c+h) = f(c) + h \, \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$, $h \neq 0$.

$$\therefore \lim_{h \to 0} f(c+h) = f(c) + \overbrace{\lim_{h \to 0} h}^{0} \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}^{f'(c)} = f(c).$$

OBS: $f(x) = |x|$ é contínua em $x=0$ mas não é derivável nesse ponto.

Def: Seja $f:(a,b) \mapsto \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos de (a,b). Nesse caso podemos dizer que f é derivável em (a,b). Além disso podemos definir a função derivável

$$f' : (a,b) \mapsto \mathbb{R} : x \in (a,b) \mapsto f'(x)$$

OBS: Seja f' a função derivada de f. Então também podemos estudar a derivada de f'. f'' é a segunda derivada de f.

$$f'' = (f')'$$

De maneira geral podemos computar a n-ésima derivada de f.