ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

# PME3100 Mecânica I

## Notas de aula

# Dinâmica do Sólido – Parte 3

Ronaldo de Breyne Salvagni

Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

**DINÂMICA DO SÓLIDO**

Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

## *5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*

Seja um sistema de *N* pontos materiais $P_i$ de massas $m_i (i = 1, 2, \cdots, N)$, com respectivas velocidades $\vec{v}_i$. Seja *O* um ponto escolhido arbitrariamente. A *quantidade de movimento angular* total do sistema, em relação ao polo *O*, é definida por:

$$\vec{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Derivando essa expressão em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i$$

1º termo:

$$\sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \wedge \vec{v}_O = \left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \wedge \vec{v}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O$$

2º termo:

$$\sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_O$$

Entretanto, como já foi visto anterioremente: $\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext}$

Portanto:

$$\boldsymbol{\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}}$$

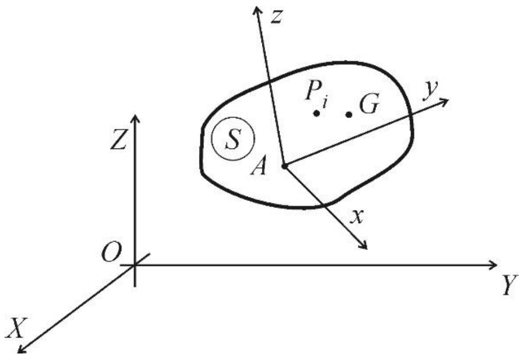
Escolhendo o ponto *O* fixo ou coincidente com o centro de massa G do sistema, temos:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$$

Assim, o enunciado do ***Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*** é:

*"A variação da quantidade de movimento angular de um sistema material, em relação a um polo fixo ou ao seu centro de massa, é igual ao momento de todas as forças externas, em relação ao mesmo polo."*

***5.1 Cálculo da quantidade de movimento angular de um corpo rígido, em relação a um ponto A desse corpo.***




Consideremos o sólido (corpo rígido) *S* movendo-se em relação ao referencial OXYZ. Seja *G* o seu centro de massa e *A* um ponto qualquer deste sólido. Este sólido pode ser considerado como um sistema de partículas $P_i$ de massas $m_i$. Pela definição:

$$\vec{H}_A = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Como temos um corpo rígido e *A* é um ponto desse corpo, podemos escrever:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)$$

onde $\vec{\omega}$ é o vetor rotação do sólido.

Assim:

$$\vec{H}_A = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i [\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] =$$
$$= \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_A + \sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)]$$

<u>1º termo:</u>

$$\sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_A = [\sum_i m_i (P_i - A)] \wedge \vec{v}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A$$

<u>2º termo</u>: Seja o sistema de coordenadas *Axyz*, <u>não necessariamente solidário ao corpo rígido</u>. Com relação a este sistema, podemos escrever:

$$P_i - A = x_i \vec{\imath} + y_i \vec{\jmath} + z_i \vec{k}$$
$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}$$

Usando estas componentes, teremos:

$$\sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] =$$
$$= \sum_i m_i \{ [(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \vec{\imath} +$$
$$+ [-y_i x_i \omega_x + (z_i^2 + x_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z] \vec{\jmath} +$$
$$+ [-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z] \vec{k} \} =$$
$$= [\omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i] \vec{\imath} +$$
$$+ [-\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i] \vec{\jmath} +$$
$$+ [-\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)] \vec{k}$$

As somatórias acima são os momentos e produtos de inércia do sólido em relação aos eixos *x*, *y* e *z*. Assim, este 2º termo fica como:

$$\sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] =$$
$$= (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \vec{\imath} +$$
$$+ (-J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) \vec{\jmath} +$$

$$+(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z)\vec{k}$$

Portanto, a quantidade de movimento angular de um corpo rígido, em relação a um ponto $A$ desse corpo, que é a origem dos eixos $x$, $y$ e $z$, será:

$$\begin{aligned}
&\vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} + \\
&+(\boldsymbol{J}_x\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{J}_{xy}\boldsymbol{\omega}_y - \boldsymbol{J}_{xz}\boldsymbol{\omega}_z)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \\
&+(-\boldsymbol{J}_{yx}\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{J}_y\boldsymbol{\omega}_y - \boldsymbol{J}_{yz}\boldsymbol{\omega}_z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \\
&+(-\boldsymbol{J}_{zx}\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{J}_{zy}\boldsymbol{\omega}_y + \boldsymbol{J}_z\boldsymbol{\omega}_z)\vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Em casos particulares, esta expressão pode se simplificar bastante.

---

**OBS.1**: O primeiro termo é nulo quando $A$ coincide com o centro de massa $G$, ou quando $A$ for um ponto fixo.

---

**OBS.2**: TQMA em notação matricial:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix};\ \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix};\ \text{Produto vetorial: } \{a\} \wedge \{b\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Matriz de inércia, sistema } (A,x,y,z)\text{: } [J_A] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix};\ (G-A) = \{G\} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{Bmatrix}$$

Temos:

$$\{\dot{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{O}}\} = \boldsymbol{m}\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{G}}\} \wedge \{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{O}}\} + \{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}^{\boldsymbol{ext}}\}$$

e, para um sólido:

$$\{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{A}}\} = \boldsymbol{m}\{\boldsymbol{G}\} \wedge \{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}}\} + [\boldsymbol{J}]\{\boldsymbol{\omega}\}$$

---

# RESUMO

## *Teorema da Resultante (TR)*

$$\boldsymbol{m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}}$$

## *Teorema da Energia Cinética (TEC) – (sólido)*

$$\Delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\tau_{ext}}$$

*Energia cinética de um sólido:*

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G\omega} \omega^2}$$

## *Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*

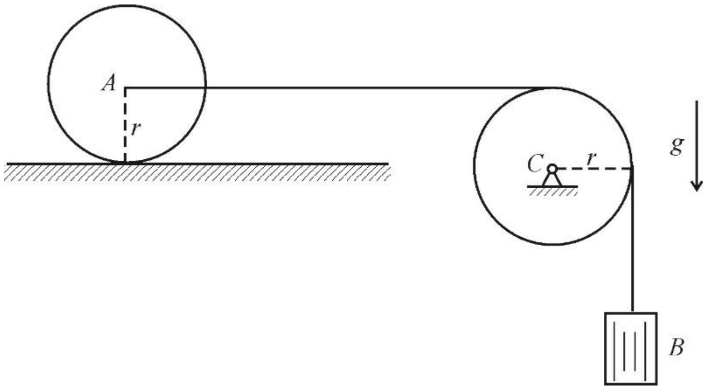
*Sistema material qualquer, em relação a um polo O qualquer:*

$$\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{m\vec{v}_G} \wedge \boldsymbol{\vec{v}_O} + \boldsymbol{\vec{M}_O^{ext}}$$

*Quantidade de movimento angular de um sólido, em relação a um ponto A desse corpo, e coordenadas (A, x, y, z):*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\vec{H}_A} &= \boldsymbol{m(G - A)} \wedge \boldsymbol{\vec{v}_A} + \\
&+ \left(\boldsymbol{J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z}\right)\boldsymbol{\vec{\imath}} + \\
&+ \left(\boldsymbol{-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z}\right)\boldsymbol{\vec{\jmath}} + \\
&+ \left(\boldsymbol{-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z}\right)\boldsymbol{\vec{k}}
\end{aligned}$$

**<u>Exemplo 5.1</u>**: O disco homogêneo de centro *A* e a polia homogênea de centro *C* têm a mesma massa *m* e o mesmo raio *r*. O disco *A* rola sem escorregar sobre o plano horizontal, enquanto o bloco *B* de massa 3*m* desce verticalmente.




O cabo é um fio ideal sem escorregamento, passa pela polia *C* e se liga ao bloco *B*. Sendo dados $J_A = J_C = mr^2/2$, determine:

a) a aceleração do bloco *B*;

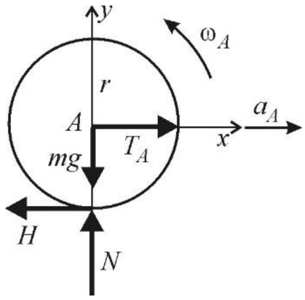
b) as trações $T_A$ e $T_B$ nos cabos, em *A* e *B*, respectivamente;

c) a componente horizontal *H* da reação do plano horizontal sobre o disco.

---

*Resolução:*

<u>Disco A:</u>




TR: $m a_A \vec{\imath} = (T_A - H)\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} m a_A = T_A - H \\ N = mg \end{cases}$ (1)

TQMA: polo *A* (centro de massa); *x* e *y* com origem em *A*, <u>mas não giram</u>

$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$

<u>e</u>

$\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + \left(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z\right)\vec{\imath} +$

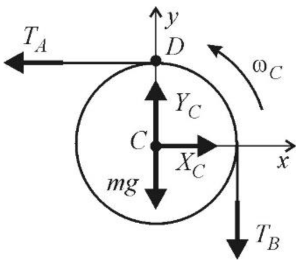
$+\left(-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z\right)\vec{\jmath} + \left(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z\right)\vec{k}$

Temos:

$\left.\begin{matrix} \vec{\omega}_A = \omega_A \vec{k} \ \left(\omega_x = \omega_y = 0\right) \\ J_{xz} = J_{yz} = 0 \text{ (simetria)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{H}_A = \omega_A J_z \vec{k} = \frac{\omega_A m r^2}{2}\vec{k} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = \frac{\dot{\omega}_A m r^2}{2}\vec{k} \\ \vec{M}_A^{ext} = -Hr\vec{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow H = -\frac{\dot{\omega}_A m r}{2}$ (2)

<u>Disco C:</u>



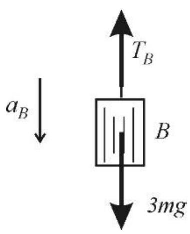

TR: $\vec{0} = (X_C - T_A)\vec{\imath} + (Y_C - T_B - mg)\vec{\jmath}$

TQMA: $\vec{H}_C = \omega_C J_C \vec{k} = \frac{\omega_C m r^2}{2}\vec{k} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_C = \frac{\dot{\omega}_C m r^2}{2}\vec{k} \\ \vec{M}_C^{ext} = (T_A - T_B) r\vec{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_A - T_B = \frac{\dot{\omega}_C m r}{2}$ (3)

<u>Bloco B:</u>

TR: $3m a_B = 3mg - T_B$ (4)




Até agora, temos 4 equações com 7 incógnitas: $H, T_A, T_B, \dot{\omega}_A, \dot{\omega}_C, a_A$ e $a_B$.

Relações cinemáticas:

- não há escorregamento: $v_A = -\omega_A r \Rightarrow a_A = -\dot{\omega}_A r$ (5)
- fio inextensível:

$$a_A = a_B \tag{6}$$

$$v_A = v_D \Rightarrow -\omega_A r = -\omega_C r \Rightarrow \dot{\omega}_A = \dot{\omega}_C \tag{7}$$

Assim, obtemos mais 3 equações e o problema pode ser resolvido.

Por substituições sucessivas:

a) $\boldsymbol{a_B = \frac{3g}{5}}$

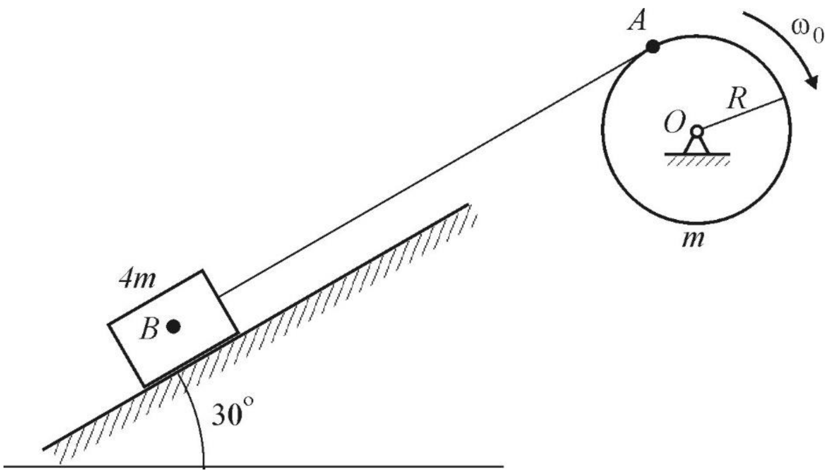
b) $\boldsymbol{T_B = \frac{6mg}{5}}$ e $\boldsymbol{T_A = \frac{9mg}{10}}$

c) $\boldsymbol{H = \frac{3mg}{10}}$

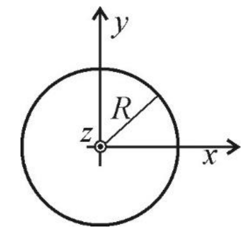
**<u>Exemplo 5.2 (ver também exemplo 4.2)</u>**: No sistema indicado na figura, o disco de centro $O$ possui raio $r$ e massa $m$. O bloco possui massa $4m$. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano é $\mu$. Sabemos que no instante $t = 0$ a velocidade angular do disco é $\omega_0$ no sentido indicado.

(a) determine após quanto tempo a velocidade angular se anula;

(b) analise o comportamento do sistema após esse tempo.



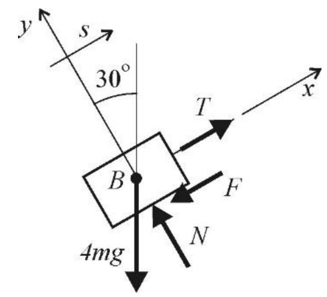

Dado:




$$J_z = \frac{MR^2}{2}$$

*Resolução*:

(a) Isolando o bloco e o disco:




<u>Bloco:</u>

TR: $4ma_B\vec{\imath} = (T - F - 4mg\sin 30°)\vec{\imath} + (N - 4mg\cos 30°)\vec{\imath} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4ma_B = T - F - 2mg & (1) \\ N = 2\sqrt{3}mg & (2) \end{cases}$$

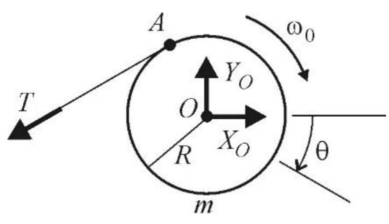
Lei de Coulomb, escorregando: $F = \mu N$

$$\tau^{ext} = \tau_T + \tau_F + \tau_{peso} = \int_{s_0}^{s} Tds - 2\sqrt{3}\mu mgs - 2mgs$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}4m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right)$$

TEC: $\int_{s_0}^{s} Tds = 2\left(\sqrt{3}\mu + 1\right)mgs + 2m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right)$ (3)

<u>Disco</u>:




$$\tau^{ext} = \int_{\theta_0}^{\theta}(-T)rd\theta$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}J_G(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{mr^2}{4}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

TEC: $\int_{\theta_0}^{\theta} Trd\theta = -\frac{mr^2}{4}(\omega^2 - \omega_0^2)$ (4)

Como o fio é inextensível, temos: $s = r\theta \Rightarrow ds = rd\theta$ e $\dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega$

Assim, re-escrevendo (3): $\int_{\theta_0}^{\theta} Trd\theta = 2\left(\sqrt{3}\mu + 1\right)mgr\theta + 2mr^2(\omega^2 - \omega_0^2)$

Substituindo em (4): $\theta = \frac{9r}{8g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}(\omega_0^2 - \omega^2)$

Derivando em relação ao tempo: $\dot{\theta} = -\frac{9r}{4g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}\omega\dot{\omega}$

Com $\dot{\theta} = \omega$, obtemos: $\dot{\omega} = -\frac{4g(\sqrt{3}\mu+1)}{9r} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{4g(\sqrt{3}\mu+1)}{9r}t$

Para $\omega = 0$, temos: $\boldsymbol{t^*} = \frac{\boldsymbol{9r}}{\boldsymbol{4g(\sqrt{3}\mu+1)}}\boldsymbol{\omega_0}$

(b) TQMA para o disco: $\vec{H}_O = J_O(-\omega)\vec{k} = -\frac{mr^2}{2}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = -\frac{mr^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = Tr\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{2mg(\sqrt{3}\mu+1)}{9}$$

A equação (1) fornece:

$$4ma_B = T - F - 2mg = \frac{2mg(\sqrt{3}\mu+1)}{9} - F - 2mg = \frac{2mg(\sqrt{3}\mu-8)}{9} - F$$

**<u>Para o bloco descer</u>:** $a_B < 0$ com $F = -\mu N = -2\sqrt{3}\mu mg$; assim:

$$\frac{2mg(\sqrt{3}\mu-8)}{9} + 2\sqrt{3}\mu mg < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\mu} < \frac{\boldsymbol{4\sqrt{3}}}{\boldsymbol{15}}$$

**Se $\boldsymbol{\mu} \geq \frac{\boldsymbol{4\sqrt{3}}}{\boldsymbol{15}}$, o bloco permanece parado.**