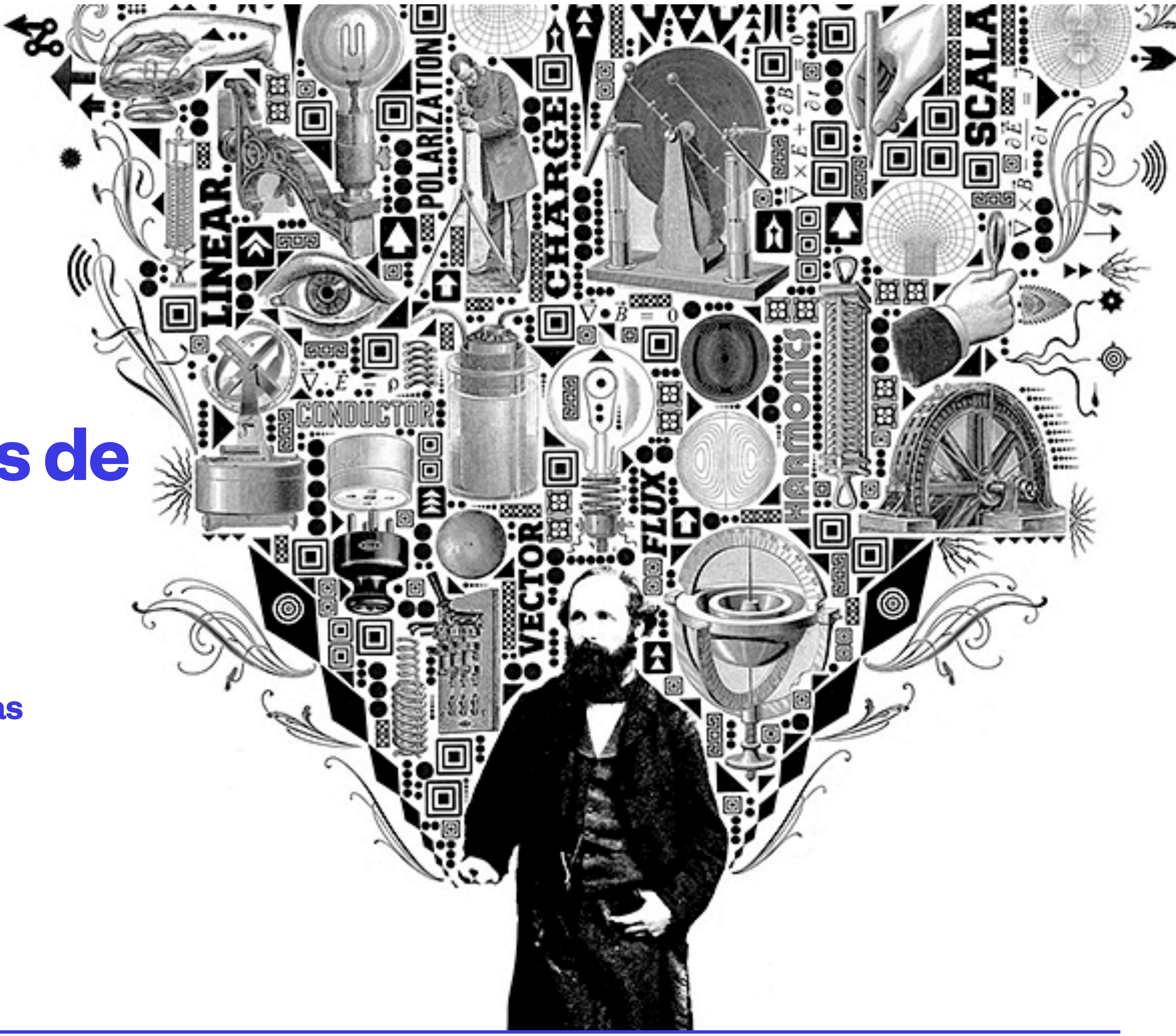
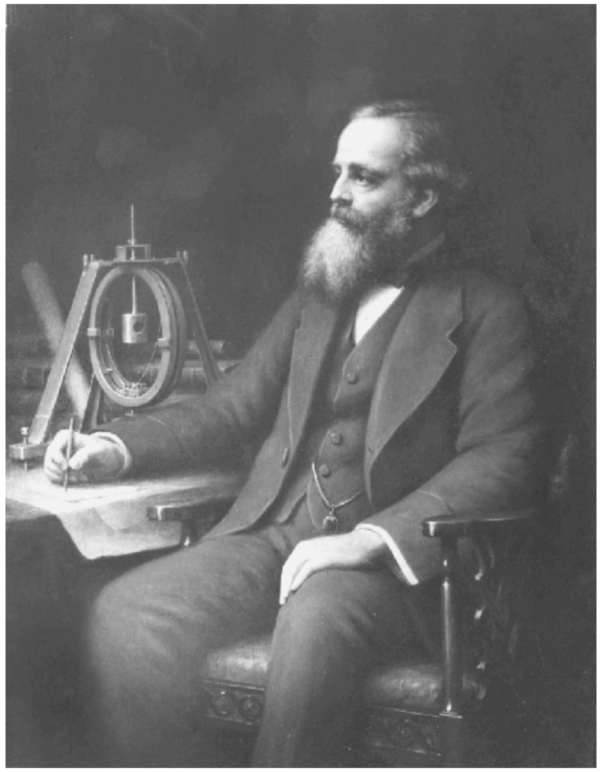
Equações de Maxwell

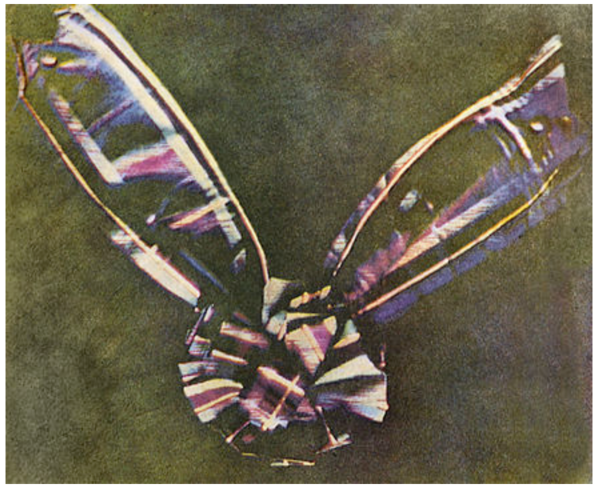
- ⚡ O problema
- ⚡ A solução
- ⚡ As consequências
- ⚡ A confirmação



As equações do eletromagnetismo

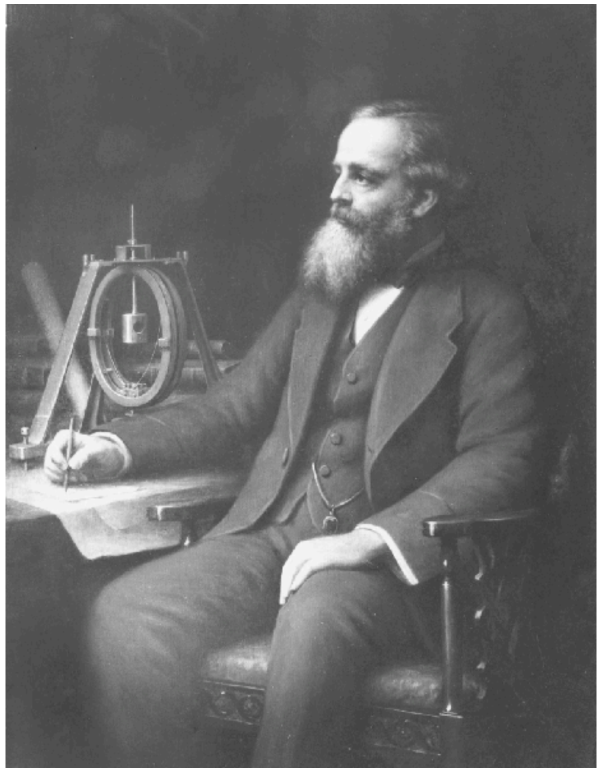
- James Clerk Maxwell (1831-1879) foi um físico matemático escocês. Aos 19 anos ele já era um matemático bem conhecido em Edimburgo, e ganhou uma bolsa para ir a Cambridge, onde se graduou em 1854.
- Ele permaneceu por mais dois anos em Cambridge, daí se mudou para Aberdeen (Marischal College), onde passou 4 anos (1856-1860) até obter um emprego no King's College (Londres).
- Foi no King's College que Maxwell começou a se interessar por electricidade e magnetismo, através dos seus interesses pelo estudo da cor, da luz e da fotografia — de fato, Maxwell foi uma das primeiras pessoas no mundo a conseguir tirar fotos em cores! (Maxwell era também teólogo, poeta, e teve contribuições fundamentais para a área de engenharia de controle…um verdadeiro polímata!!!)
- Foi também nessa época que Maxwell também se aprofundou na mecânica dos fluidos (hidrodinâmica), e foi introduzido a Michael Faraday — que, naquela época, já chegando próximo do fim de sua vida.
- Foi Faraday quem introduziu a Maxwell o conceito de ***campo*** e de ***linhas de campo*** como ferramentas fundamentais para compreender problemas de Eletromagnetismo e de Mecânica dos Fluidos. Faraday, que viu em Maxwell um gênio que poderia completar o trabalho que ele havia começado, estimulou Maxwell a atacar o desafio de completar a teoria eletromagnética — que àquela época sabia-se ser incompleta.

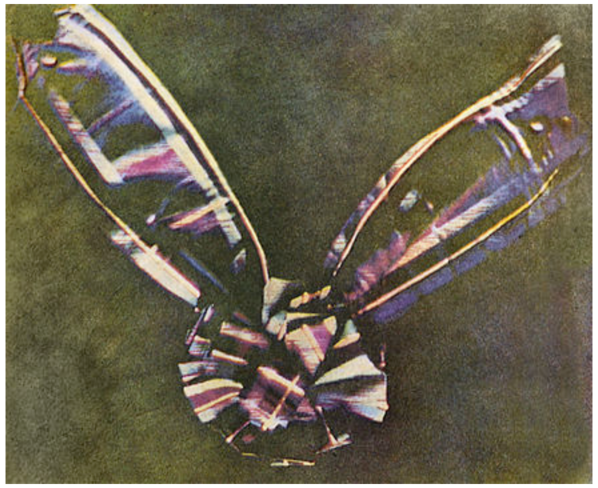




As equações do eletromagnetismo

- O primeiro artigo de Maxwell sobre o assunto é 1855, e trata de "Faraday's lines of force". Em 1861 ele descreve a lei de indução de Faraday em termos do fluxo do campo magnético, em por volta de 1862 ele já começa a discutir o term que "faltava" nas equações — a "corrente de deslocamento".
- Em 1862 ele também calculou a velocidade de uma onda eletromagnética no vácuo, chegando à conclusão que ela era idêntica à velocidade da luz — o que não poderia ser mera coincidência. Isso levou ele a escrever o artigo "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", onde as equações de Maxwell aparecem pela primeira vez. Esses trabalhos foram depois coletados no seu livro, "A Treatise on Electricity and Magnetism".
- É interessante apontar que as Equações de Maxwell em sua forma original eram 20 equações na notação de *quaternions* (para t,x,y,z) . Foi Oliver Heaviside quem reduziu isso às quatro equações que conhecemos!
- O que é notável é que Maxwell, ao "completar" o Eletromagnetismo, não só unificou as duas forças (Elétrica e Magnética), mas foi capaz de prever e descrever novos fenômenos, trazendo todo o estudo da luz e da óptica para dentro do Eletromagnetismo.





As equações do eletromagnetismo

- De ~1830 até ~1861, as leis da Electricidade e do Magnetismo eram:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \text{(Lei de Gauss para o campo elétrico)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(Lei de Gauss para o campo magnético)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \text{(Lei de Ampère)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Lei de Faraday)}$$

- Todas essas equações foram derivadas sob a hipótese de cargas e/ou correntes estacionárias (inclusive a lei de Faraday, que era testada basicamente por meio de ímãs ou eletromagnetos com corrente contínua constante).
- Mas era ainda um mistério por que essas leis pareciam não valer quando temos uma dependência no tempo das densidades de carga e de corrente.
- O principal problema com as equações acima reside na Lei de Ampère. É uma identidade matemática que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = 0 \quad ,$$

portanto a Lei de Ampère nessa forma ***só pode ser válida*** se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow 0$$

As equações do eletromagnetismo

- Por outro lado, podemos re-escrever a Equação da Continuidade como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right)}{\partial t} \quad , \qquad \text{e portanto:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad ,$$

onde $\partial \vec{D} / \partial t$ é chamada da **corrente de deslocamento**.

- Isso significa que podemos "consertar" a Lei de Ampère pela substituição:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- O significado dessa equação é que, assim como um campo magnético que varia com o tempo induz um campo elétrico (a força eletromotriz), um campo elétrico que varia com o tempo é igualmente capaz de induzir campos magnéticos, mesmo na ausência de uma corrente (no sentido local). Em outras palavras, um "deslocamento" do campo elétrico parece ser equivalente a uma corrente.

As equações do eletromagnetismo

- É curioso que Maxwell chegou a essas equações e a conclusões similares de um modo bem menos direto do que o entendimento que temos hoje em dia.
- Maxwell gostava de pensar nos campos elétrico e magnético em termos de "vórtices moleculares", e nos campos como as manifestações desses vórtices nos materiais. Nas suas palavras:

  "I propose to examine magnetic phenomena from a mechanical point of view, and to determine which tensions or movements in the medium will produce the mechanical phenomena that we observe"

- Ele se utilizava o tempo todo de analogias com a hidrodinâmica:

  "I do not wish to explain the origin of the observed forces through the effects of those forces and tensions in elastic materials, but to take advantage of the mathematical analogies between the two problems"

- O que fica aparente é que Maxwell estava tentando entender esses "vórtices moleculares" (o campo magnético) de um modo similar à polarização dos meios dielétricos, usando um modelo mecânico.
- Mas ao fim e ao cabo, a descrição em termos de campos é a mais econômica e elegante: densidades de cargas e correntes, campos elétricos e magnéticos, todos esses são ***campos*** que preenchem o espaço de um modo contínuo.

A corrente de deslocamento

- Vamo retornar à corrente de deslocamento, e usar o exemplo clássico de um capacitor que está sendo carregado.
- Da Lei de Ampère original temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \int_{S(C)} d\vec{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{H} = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \vec{J}$$

- Entretanto, a nossa escolha da superfície circunscrita pelo circuito C é completamente arbitrária: por um lado, poderíamos escolher o disco plano no meio do capacitor, com o resultado:

$$\int_{S_1(C)} d\vec{S} \cdot \vec{J} = 0$$

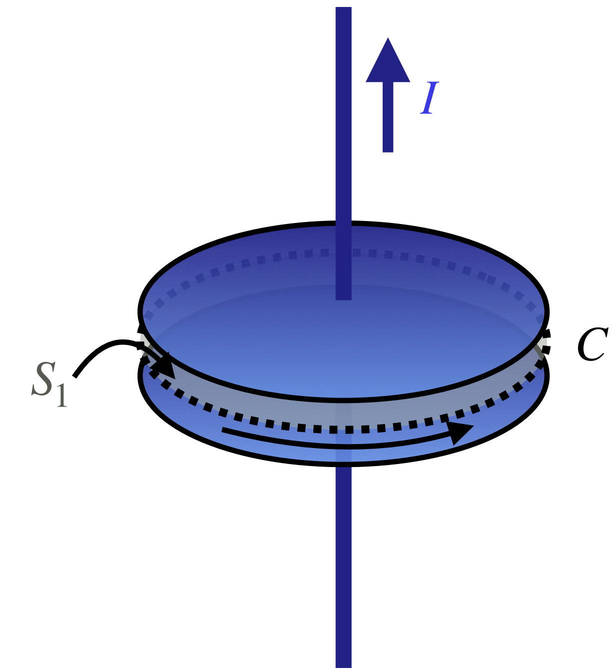
- Por outro lado, uma escolha igualmente válida seria fechar a superfície "pelo lado de fora" do capacitor, de tal forma que a corrente I atravessa essa segunda superfície. Ness caso temos:

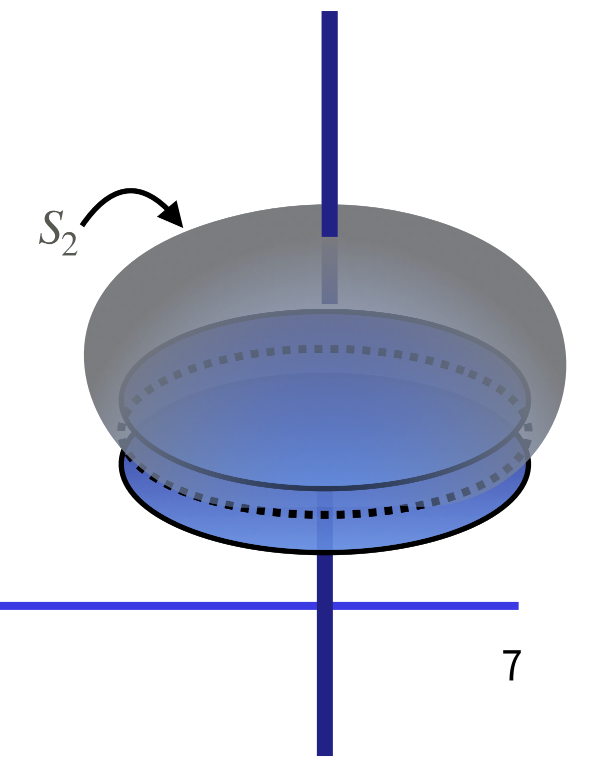
$$\int_{S_2(C)} d\vec{S} \cdot \vec{J} = I$$

- O problema é que a integral na primeira superfície, usando a Lei de Ampère "antiga", está errada! O correto seria:

$$\int_{S_1(C)} d\vec{S} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1(C)} d\vec{S} \cdot \vec{D} = \frac{\partial Q}{\partial t} = I$$

(Para ver que esse deve ser o caso, considere a superfície bem junto à placa do capacitor.)





Equações de Maxwell para os potenciais

- Também é útil formular as Eqs. de Maxwell em termos dos potenciais. Na Eletrostática e Magnetostática temos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Da Lei de Faraday temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Mas a equação acima implica que $\vec{E} + \partial \vec{A}/\partial t$ é um gradiente. De fato, na Eletrostática nós definimos $\vec{E} \to -\vec{\nabla}\phi$, porém agora, dada a lei de Faraday's, a identificação correta é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- Como a Lei de Gauss para o campo magnético não muda, podemos manter a definição $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- Vamos contemplar agora algumas consequências dessa generalização dos potenciais eletromagnéticos.

Equações de Maxwell para os potenciais

- Da nossa redefinição do campo elétrico, a lei de Gauss é agora expressa como uma Equação de Poisson modificada:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \quad -\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

- Por outro lado, a lei de Ampère (já corrigida pela corrente de deslocamento) fica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \;=\; \mu \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \;=\; \mu \left[\vec{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right]$$

- Definindo a “velocidade do som” $1/c_s^2 = \mu\epsilon$ como sendo o termo que multiplica $\partial^2 \vec{A} / \partial t^2$, obtemos a equação:

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \;=\; \mu \, \vec{J}$$

Equações de Maxwell para os potenciais

- Essas duas equações para os potenciais,

  $$-\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad , \text{ e}$$

  $$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu\,\vec{J}$$

  podem parecer um pouco mais complexas do que as Eqs. de Maxwell, mas elas são o ponto de partida para resolver qualquer problema.

- Uma das razões pelas quais essas equações são tão úteis é o fato de que há muitos (infinitos) potenciais que levam a exatamente os mesmos campos físicos, e podemos escolher qualquer um deles.

- Essa **liberdade para escolha dos calibres** significa que podemos formular um dado problema em termos dos potenciais de várias maneiras, e escolher aquela na qual o problema se torna mais fácil e claro. A ***invariância de calibre*** por trás dessa escolha é o fato de que os campos são invariantes sob as transformações:

  $$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

  $$\phi \to \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

  Ou seja, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ e $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, não dependem dessa função arbitrária $\Lambda(t, \vec{x})$.

- Esse foi o primeiro momento em que o conceito de **invariância de gauge (calibre)** entrou na Física. A invariância de gauge é uma das bases mais fundamentais do **Modelo Padrão de Partículas e Campos** (ou seja, da Teoria Quântica de Campos) e da **Relatividade Geral**. De fato, a invariância de gauge é uma generalização da ideia de **invariância sob transformações de coordenadas**: podemos, de fato, pensar no calibre como sendo uma escolha das coordenadas para representar os campos, mas **os observáveis físicos não dependem dessas escolhas!**

Transformações de gauge

- A função $\Lambda(t, \vec{x})$ é um escalar sem significado físico (***não observável***) que pode ser escolhida de um modo completamente arbitrário — ela só deve ser uma função contínua e diferenciável. Ela não tem que obedecer nenhuma simetria ou vínculo: é ***escolha do cliente***!
- Quando dizemos que "fixamos o calibre" (gauge), o que queremos dizer é que escolhemos uma função Λ de tal modo que podemos impor um determinado vínculo sobre os potenciais. Por exemplo, podemos usar o **calibre de Lorentz** ao impor que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \to \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \right) + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \; = \; 0$$

Aqui, $\vec{A}\,'$, ϕ' se referem ao calibre "original"; $\vec{A}$, ϕ são o novo calibre (de Lorentz)

- Digamos que num calibre original, genérico, encontramos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,' + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = f(t, \vec{x}) \quad \to \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \right) + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \; = \; f(t, \vec{x})$$

- Tudo que precisamos fazer então é resolver a equação para Λ:

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \; = \; f(t, \vec{x})$$

[Uma equação de onda com fontes!]

- Substituindo essa solução no vínculo acima encontramos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Transformações de gauge

- O calibre de Lorentz é extremamente útil na Eletrodinâmica, pois as equações para os potenciais assumem uma forma simples e intuitiva.
- Vamos então impor o vínculo $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ nas Eqs. de Maxwell:

$$-\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad , \text{ e}$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu \vec{J}$$

- Substituindo o potencial-vetor na primeira equação obtemos:

$$-\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon}}$$

- O mesmo pode ser feito com o potencial elétrico na Lei de Ampère:

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{J}}$$

- Nós vamos retornar muitas vezes a essas equações.

Transformações de gauge

- Uma outra escolha popular é o **calibre de Coulomb** (também chamado às vezes de "calibre de radiação", ou "calibre transverso", por motivos que veremos adiante).
- Nesse caso usamos a liberdade de gauge para impor o vínculo $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Desse modo as equações ficam:

$$-\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad , \text{ hence } \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dV' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad , \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} = \mu \vec{J}$$

- Se tomamos $\vec{\nabla} \cdot (\ldots)$ das equações acima, nós simplesmente verificamos a Equação da Continuidade (uma condição de integrabilidade das Eqs. de Maxwell).
- A última equação pode ser mais simplificada se observamos que tomando o seu rotacional, $\vec{\nabla} \times (\ldots)$, nos livramos do termo do potencial elétrico . Mas e a corrente?…
- Podemos decompor a corrente numa parte de puro gradiente ("longitudinal"), e uma parte pura rotacional ("transversa"), assim como fizemos no Teorema de Helmholtz:

$$\vec{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \text{e} \quad \vec{J}_t = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int dV' \frac{\vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- Usando a Eq. da Continuidade nós vemos que a equação para $\vec{A}$ se decompõe em duas. A primeira equação basicamente nos retorna a derivada no tempo da Lei de Gauss:

$$\epsilon \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{J}_l \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_s^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \vec{J}_l$$

- A segunda equação fica agora simplesmente:

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_t$$

Transformações de gauge

- Note que no calibre de Coulomb o potencial elétrico ϕ (ao contrário do potencial-vetor $\vec{A}$) **não obedece** uma equação de onda.

- Mesmo assim, podemos relacionar os potenciais no calibre de Coulomb $(\vec{A}_C, \phi_C)$ aos do calibre de Lorentz $(\vec{A}_L, \phi_L)$, por meio da função Λ que relaciona os dois. Digamos que a gente começou um cálculo no calibre de Lorentz, e queremos obter os potenciais no calibre de Coulomb:

$$\vec{A}_C = \vec{A}_L + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \phi_C = \phi_L - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad .$$

- A função Λ deve ser tal que o vínculo do calibre de Coulomb seja satisfeito:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_C = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A}_L + \vec{\nabla}\Lambda \right) = 0 \quad , \quad \text{portanto} \quad \vec{\nabla}^2 \Lambda = - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L \quad .$$

- Então, de posse da sua solução $\vec{A}_L$ no gauge de Lorentz, você deve resolver para Λ usando a equação de Poisson acima , e daí é só substituir nas relações para $\vec{A}_C$ e ϕ_C.

As equações do eletromagnetismo

- Aqui estão, portanto as leis da Eletrodinâmica, como reunidas por Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$ (Lei de Gauss para o campo elétrico)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ (Lei de Gauss para o campo magnético)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ (Lei de Ampère)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (Lei de Faraday)

- No caso de relações constitutivas lineares temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{J}$$, onde $c_s^2 = 1/(\mu\epsilon)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

… and Maxwell said:

"Let there be light"

Próxima aula:

- Leis de Maxwell em meios materiais
- Condições de contorno
- Supercondutividade

- PROVA (P2): dia 12/11 (próxima sexta-feira!)

- Leitura: Griffiths, Cap. 8
- Leitura complementar: Jackson, Cap. 6