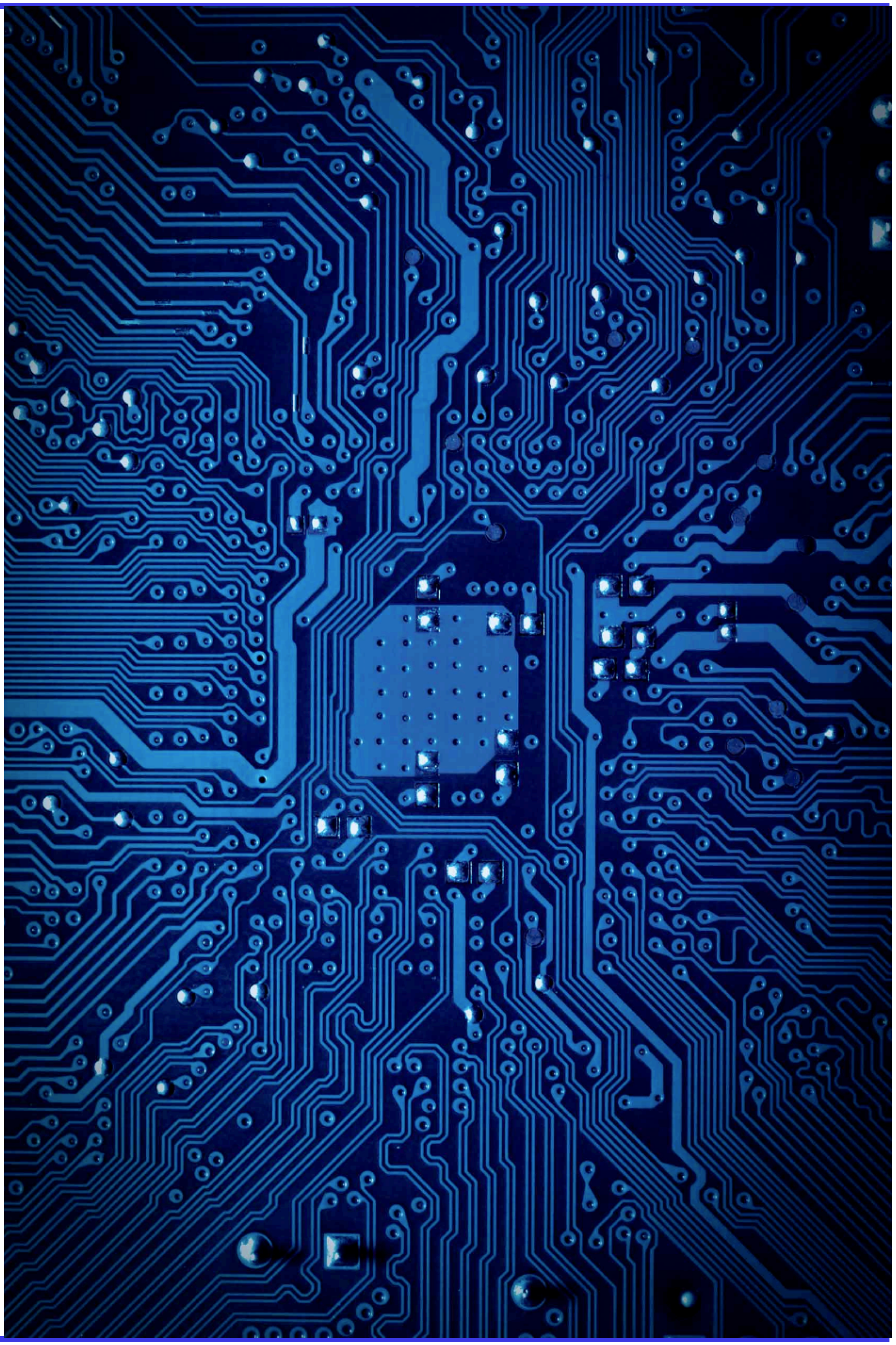
Circuitos RLC

- ⚡ Princípios gerais
- ⚡ Sistemas em série e em paralelo
- ⚡ Osciladores
- ⚡ Filtros



Circuitos: elementos básicos

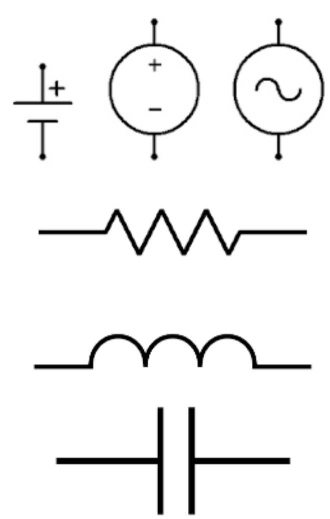
- As propriedades eletromagnéticas dos materiais permitem que possamos manipular não apenas voltagens e correntes, mas também os próprios campos eletromagnéticos.
- Os elementos principais que compõe um circuito elétrico são:

  Fonte (AC ou DC)

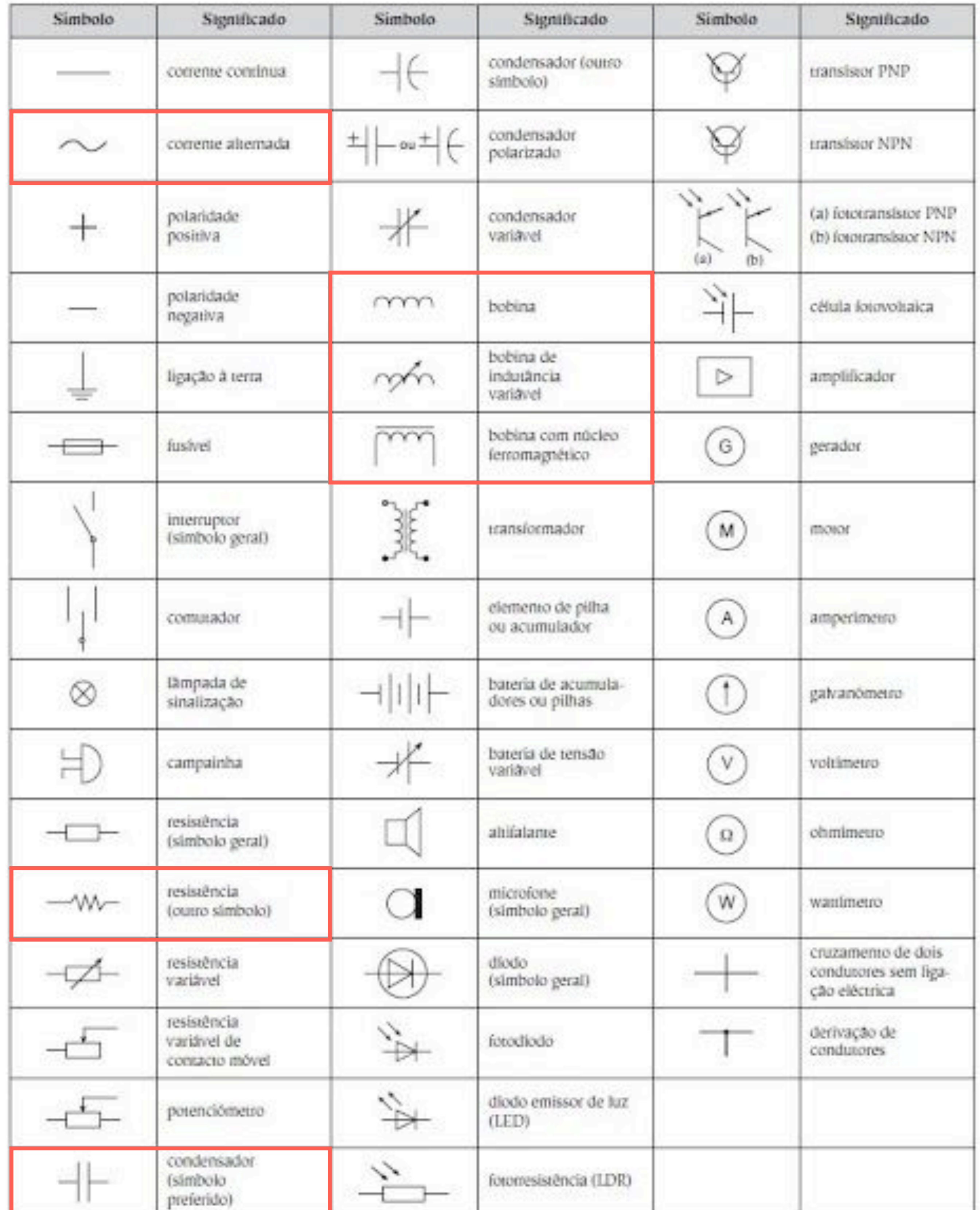
  Resistência

  Indutância (bobina)

  Capacitor



- Combinando esses elementos podemos construir circuitos que cumprem uma variedade infinita de funções.



Símbolo	Significado	Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
	corrente contínua		condensador (outro símbolo)		transístor PNP
	corrente alternada	ou	condensador polarizado		transístor NPN
	polaridade positiva		condensador variável	(a) (b)	(a) fototransístor PNP (b) fototransístor NPN
	polaridade negativa		bobina		célula fotovoltaica
	ligação à terra		bobina de indutância variável		amplificador
	fusível		bobina com núcleo ferromagnético	G	gerador
	interruptor (símbolo geral)		transformador	M	motor
	comutador		elemento de pilha ou acumulador	A	amperímetro
	lâmpada de sinalização		bateria de acumuladores ou pilhas		galvanómetro
	campainha		bateria de tensão variável	V	voltímetro
	resistência (símbolo geral)		altifalante	Ω	ohmímetro
	resistência (outro símbolo)		microfone (símbolo geral)	W	wattímetro
	resistência variável		díodo (símbolo geral)		cruzamento de dois condutores sem ligação eléctrica
	resistência variável de contacto móvel		fotodíodo		derivação de condutores
	potenciómetro		díodo emissor de luz (LED)		
	condensador (símbolo preferido)		fotorresistência (LDR)		

Elementos básicos

- Além da ***fonte de voltagem*** (corrente contínua ou alternada) e da ***resistência***, dois elementos têm um caráter eletromagnético mais "sofisticado":

  O capacitor (ou condensador) é um aparato que guarda energia na forma do campo elétrico, e acumula cargas que podem depois serem liberadas rapidamente;

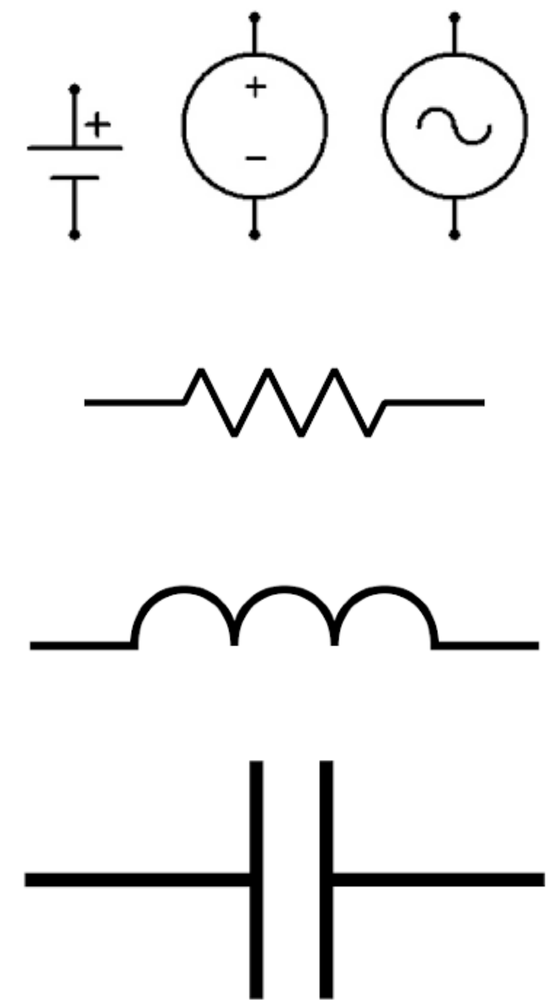
  O indutor (ou bobina) é um aparato que consegue guardar energia na forma de um campo magnético, e devido à Lei de Faraday, introduz um retardo (uma "inércia") nos sinais.

- Vamos recordar como cada elemento relaciona a voltagem e a corrente:

  Resistência: $\Delta V = I\,R$

  Capacitor: $\Delta Q = C\,\Delta V \quad \leftrightarrow \quad \Delta V = \dfrac{1}{C}\Delta Q = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int dt\,I$

  Indutor: $\Delta V = L\dfrac{d\,I}{dt} \qquad (\Delta V \leftrightarrow \mathscr{E})$



Circuitos em série

- Os circuitos mais simples que podemos montar consistem de vários desses elementos, montados um após o outro, num único fio. Um caso simples é mostrado ao lado: uma fonte alimenta uma resistência, depois uma resistência, depois um indutor, e depois um capacitor.

- Podemos usar as relações da página anterior para ver que a equação que determina o comportamento desse sistema é dada por:

$$V = R\,I(t) + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) \;= R\,\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q(t)$$

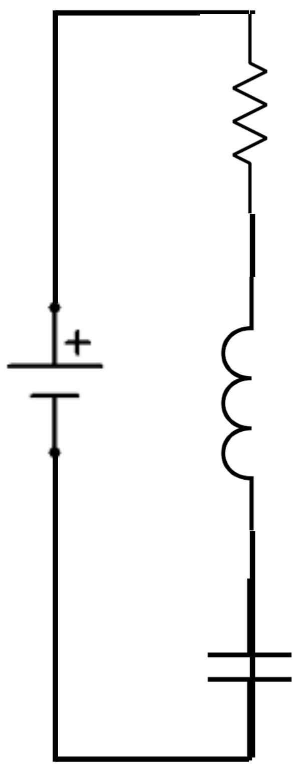
- No caso de uma fonte de corrente contínua a uma **voltagem fixa**, $V = V_0$, podemos derivar a equação acima no tempo e obter:

$$R\,\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

- Mas essa é exatamente a equação de um ***oscilador harmônico amortecido***! Definindo a ***frequência fundamental*** do circuito e o fator de ***atenuação***:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L\,C} \qquad , \qquad \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{R}{L} \qquad ,$$ e tentando uma solução $I = I_0\, e^{i\omega t}$, chegamos em:

$$\Rightarrow \quad \omega^2 + 2\omega\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = i\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

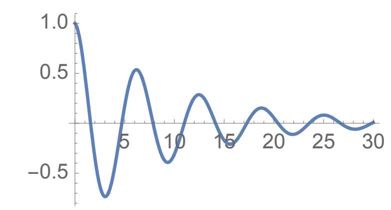


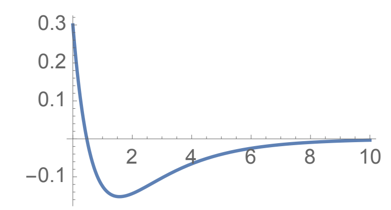
Circuitos em série

- Nesse caso simples, desprezando a solução que cresce exponencialmente (claramente ela "não satisfaz as condições de contorno"), temos dois casos:

Caso sub-crítico: $\alpha < \omega_0$ $\quad I(t) = I_0 \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \psi\right) e^{-\alpha t}$

Caso super-crítico: $\alpha > \omega_0$ $\quad I(t) = I_0 \left(c_1 e^{t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\right) e^{-\alpha t}$



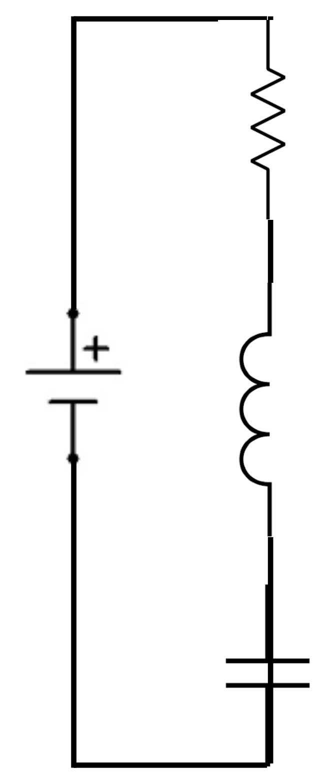


- Para completar o problema, temos que especificar algumas outras condições. Por um lado, note que no instante inicial ($t = 0$) a carga armazenada no capacitor ainda é nula, e portanto a equação para a carga envolve apenas a corrente:

$$V_0 = R\, I(t=0) + L\dot{I}(t=0) \qquad \text{onde} \quad \dot{I} = dI/dt$$

- Agora basta substituir as soluções acima e encontrar I_0 e ψ, no caso sub-crítico, ou c_1 e c_2 no caso super-crítico. Vamos considerar o caso sub-crítico, onde obtemos:

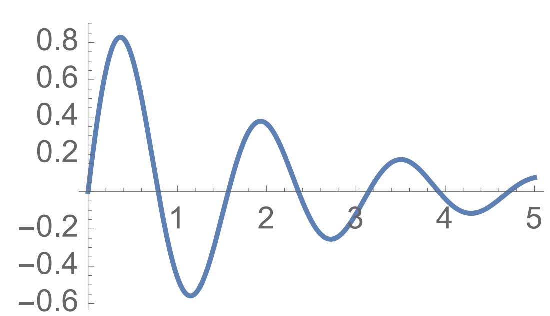
$$V_0 = R\, I_0 \cos\psi - L\left[I_0\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\, \sin\psi + \alpha\, \cos\psi\right]$$



- Note que isso é ***uma*** equação — afinal, especificamos que $Q(t=0) = 0$. Claramente, ainda falta outra equação — que pode ser, por exemplo, $I(t=0) = 0$. Nesse caso temos que $\psi = -\pi/2$, e se for assim teremos:

$$V_0 = L I_0 \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{V}{L\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \qquad \text{e portanto:}$$

$$I(t) = I_0 \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\right) e^{-\alpha t}$$



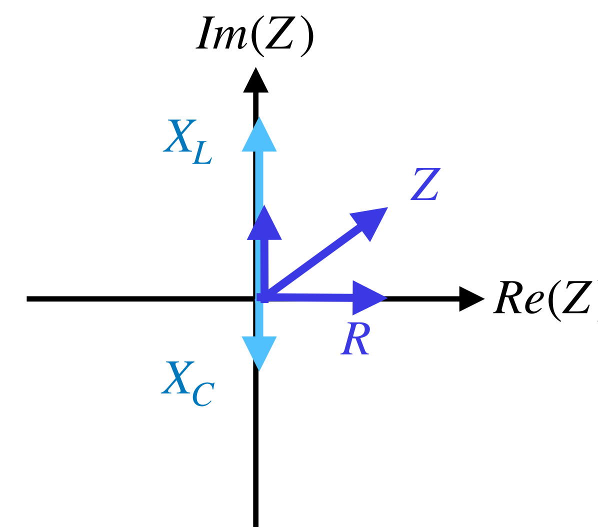
Circuitos em série: corrente alternada

- Mas o que aconteceria se tivéssemos ao invés de uma corrente contínua uma fonte de corrente alternada?

$$V = V_0\, e^{i\omega t} = R\, I(t) + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) \quad \longleftrightarrow \quad i\omega\, V_0\, e^{i\omega t} = R\,\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C}I$$

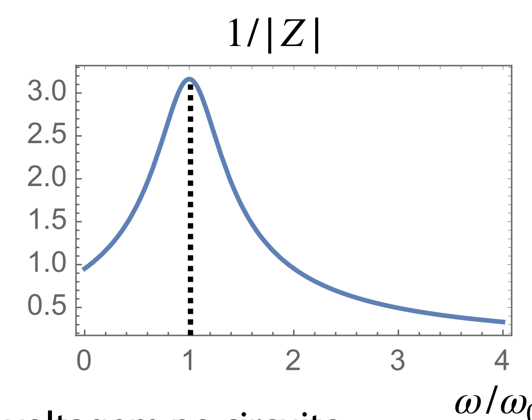
- Podemos novamente tentar o nosso ansatz da forma anterior, $I = I_0\, e^{i\omega t}$, resultando na equação:

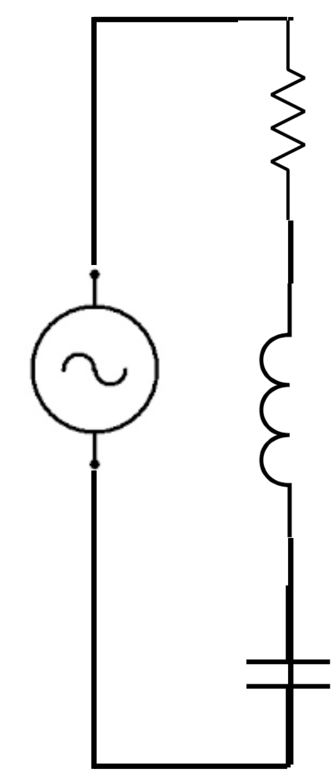
$$\frac{V_0}{I_0} = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



- Sim, esse é basicamente um ***oscilador harmônico forçado e amortecido***! Mas é útil olhar para as soluções que os engenheiros bolaram para lidar com esse problema. É interessante introduzir a noção de ***impedância***:

$$Z = R + iX \quad , \quad X = X_L + X_C \quad , \quad \text{com} \quad X_L = \omega L \quad , \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$





- O módulo da impedância é:

$$|Z| = Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \quad , \text{ ou de modo equivalente,}$$

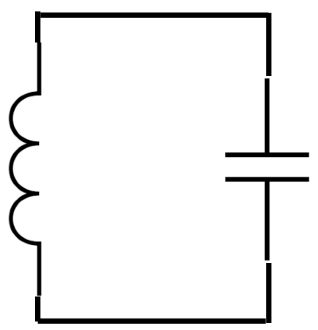
$$Z = Z_0\, e^{i\Psi} \quad \text{onde a fase} \quad \tan\Psi = \frac{X}{R} \quad \text{também dá a defasagem entre a corrente e a voltagem no circuito.}$$

- Quando $X = 0$ temos a ***frequência de ressonância*** do sistema, e nesse caso $Z = R$. Isso acontece quando:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad , \text{ o que é idêntico ao que foi encontrado no caso anterior (fonte DC).}$$

Energia em um circuito LC

- Vamos considerar agora um circuito muito simples, composto apenas de uma bobina (indutor) e um capacitor.



- Nesse caso podemos assumir que o capacitor vem ***carregado inicialmente***, e num dado instante inicial nós fechamos o circuito.
- A equação para o circuito fica então

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int^{t} dt'\, I(t') = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C}\, I(t) = 0$$

- Claramente, isso é um oscilador harmônico, com a frequência fundamental $\omega_0^2 = 1/(L\,C)$. Portanto, se a corrente for nula no instante inicial temos uma solução:

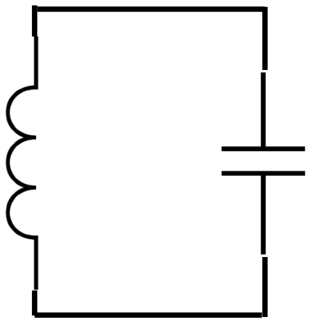
$$I = I_0 \sin \omega_0 t$$

e a carga no capacitor é:

$$Q(t) = -\frac{I_0}{\omega_0}\cos \omega_0 t$$

Energia em um circuito LC

- O interessante nesse sistema é que ele não tem atenuação (resistência), então a carga no capacitor e a corrente ficam se alternando.
- Mas vamos ver o que está acontecendo com a energia.
- Podemos primeiro ver o que está acontecendo no capacitor. E energia dele é dada por:

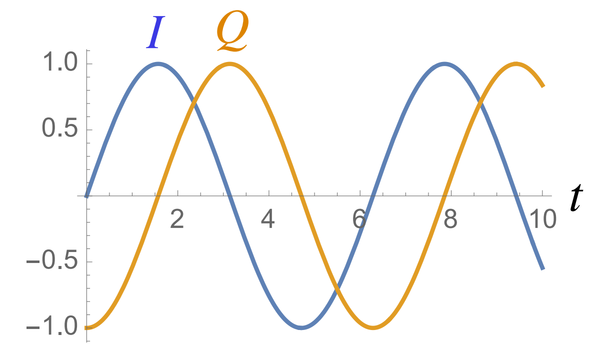


$$U_E = \frac{1}{2} C\, V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{\omega_0^2\, C} \cos^2 \omega_0 t$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{1}{2} L\, I_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

- Por outro lado, a energia que fica guardada na bobina (indutor) pode ser expressa em termos da corrente e da indutância da bobina. Sabendo que:

$$P = \frac{dU_B}{dt} = -\,\mathscr{E} I = L \frac{dI}{dt}\, I = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L I^2\right)$$



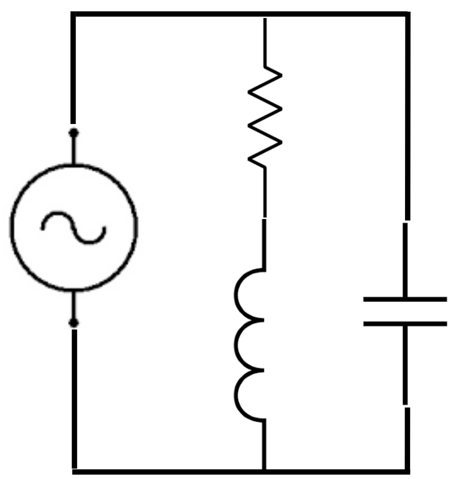
- Portanto, a energia que fica guardada no campo magnético gerado pela bobina é:

$$U_B = \frac{1}{2} L\, I^2 = \frac{1}{2} L\, I_0^2 \sin^2 \omega_0 t \qquad \text{e portanto:}$$

$$U = U_E + U_B = L\, I_0^2 = L\, (Q_0^2 \omega_0^2) = \frac{Q_0^2}{C}$$

Ou seja, a energia fica "oscilando" entre o campo elétrico e o campo magnético!

Circuitos em paralelo: filtros



- Vamos considerar agora o seguinte circuito em paralelo (figura ao lado), com fonte AC, $V = V_0 \, e^{i\omega t}$
- A mesma voltagem é aplicada nos pontos A e B, e os pontos C e D também têm a mesma voltagem.
- Além disso, a corrente que flui de A a D se soma à corrente que flui de B a C, e portanto temos as três equações:

(i) $I = I_{AD} + I_{BC}$

(ii) $V = R I_{AD} + L \dfrac{dI_{AD}}{dt}$

(iii) $V = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int dt \, I_{BC}$

- Vamos tentar novamente uma solução do tipo $I = I_0 \, e^{i\omega t}$, $I_{AD} = I_1 \, e^{i\omega t}$, $I_{BC} = I_2 \, e^{i\omega t}$. Isso leva às equações:

(i) $I_0 = I_1 + I_2$

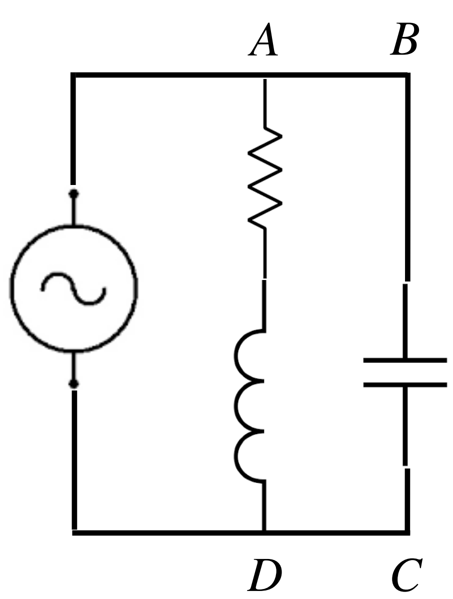
(ii) $V_0 = (R + i\omega L) \, I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = V_0 \dfrac{1}{R + i\omega L}$

(iii) $i\omega V_0 = \dfrac{1}{C} I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = i\omega C V_0$

- Juntando I_1 e I_2 obtemos finalmente que:

$$I = (I_1 + I_2) e^{i\omega t} = \left(\frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \right) V_0 \, e^{i\omega t}$$

Circuitos em paralelo: filtros



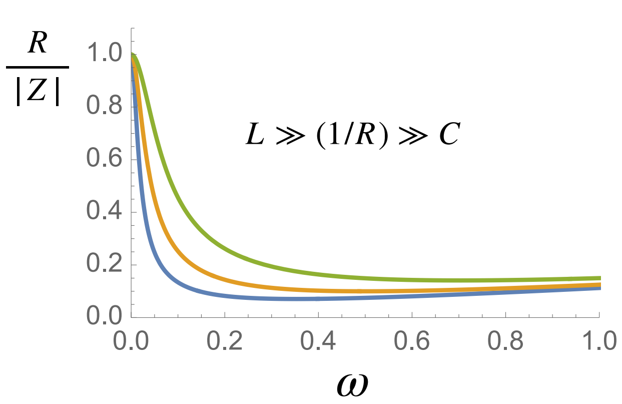
- Vamos repetir aqui essa solução, em termos da impedância:

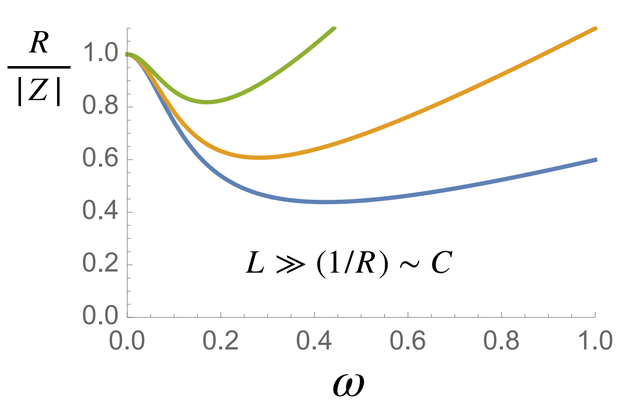
$$I = \frac{V_0}{Z}\, e^{i\omega t} \quad , \quad \text{com} \quad \frac{1}{Z} = \frac{R + i\left[\omega L + \omega C(R^2 + \omega^2 L^2)\right]}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

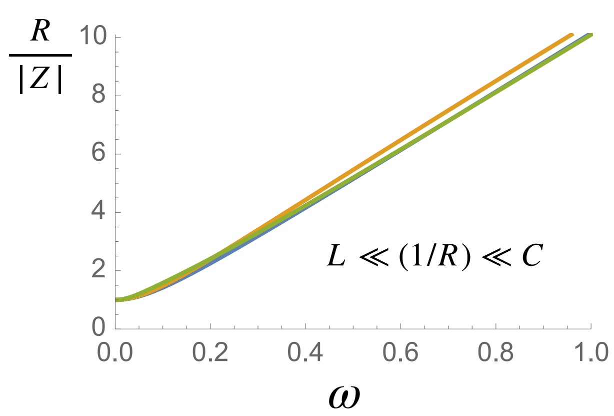
- Vamos agora analizar essa corrente por meio da dependência da impedância com a frequência.
- Para frequências muito baixas a impedância fica constante, igual à resistência:

$$\frac{1}{Z} \to \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R}$$

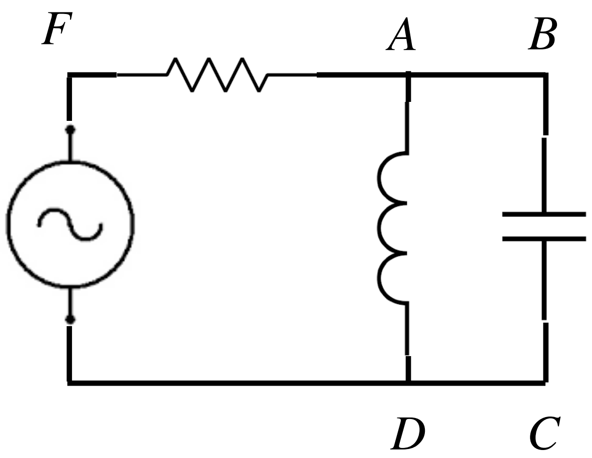
- A dependência no caso em que a impedância é muito grande se torna mais interessante: podemos efetivamente **filtrar as frequências mais altas**, como mostrado nas figuras.







Circuitos em paralelo: filtros



- Vamos considerar um outro exemplo, ainda com fonte AC, $V = V_0\, e^{i\omega t}$
- Temos as seguintes condições:

(i) $I = I_{AD} + I_{BC}$

(ii) $V - I\,R = L\dfrac{dI_{AD}}{dt}$

(iii) $V - I\,R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int dt\, I_{BC}$

- Vamos tentar novamente uma solução do tipo $I = I_0\, e^{i\omega t}, I_{AD} = I_1\, e^{i\omega t}, I_{BC} = I_2\, e^{i\omega t}$. Isso leva às equações:

(i) $I_0 = I_1 + I_2$

(ii) $V_0 - I_0 R = +\, i\omega L\, I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \dfrac{V_0 - I_0 R}{i\omega L}$

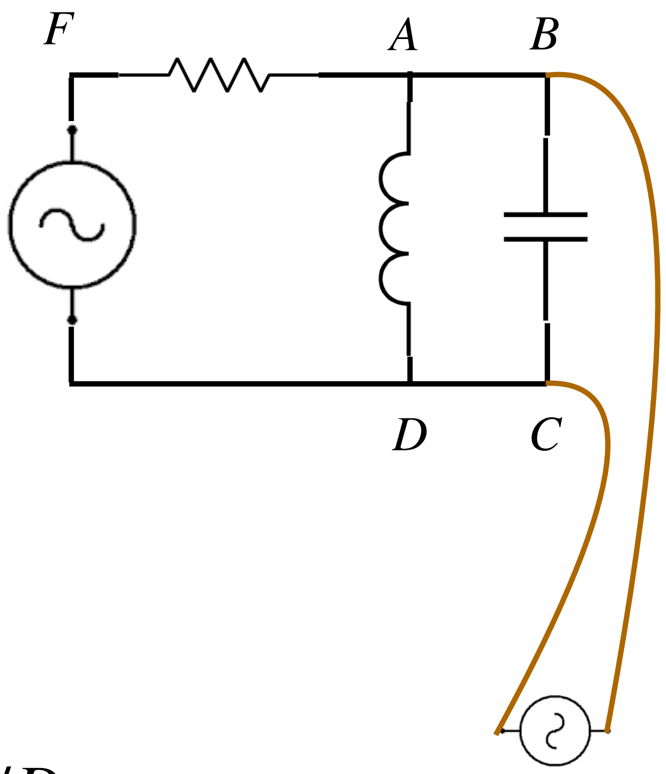
(iii) $i\omega(V_0 - I_0 R) = \dfrac{1}{C} I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = i\omega C(V_0 - I_0 R)$

- Juntando I_1 e I_2 obtemos uma equação para I_0 :

$$I_0 = I_1 + I_2 = \frac{V_0 - I_0 R}{i\omega L} \;+\; i\omega C(V_0 - I_0 R) \qquad \Rightarrow \qquad I_0\left[1 + \frac{R}{i\omega L} + i\omega CR\right] = V_0\left[\frac{1}{i\omega L} + i\omega C\right]$$

Circuitos em paralelo: filtros

- Portanto, a corrente que flui pelo circuito é dada por:



$$I_0 = V_0 \frac{\frac{1}{i\omega L} + i\omega C}{1 + \frac{R}{i\omega L} + i\omega CR} = \frac{V_0}{R} \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R}$$

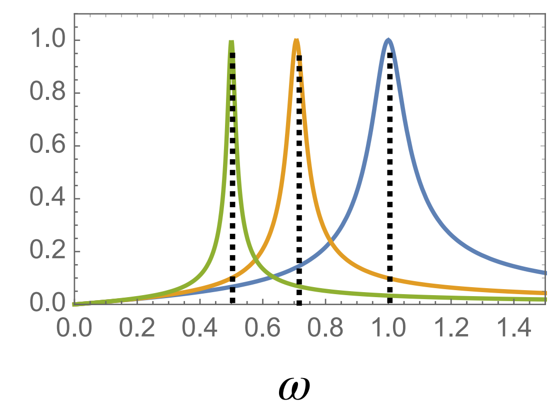
- O fator de atenuação é portanto:

$$\frac{I_0}{V_0} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R}$$

- Uma versão mais realística desse circuito usa a voltagem entre os pontos A/B e C/D como sinal "filtrado". Nesse caso temos a voltagem:

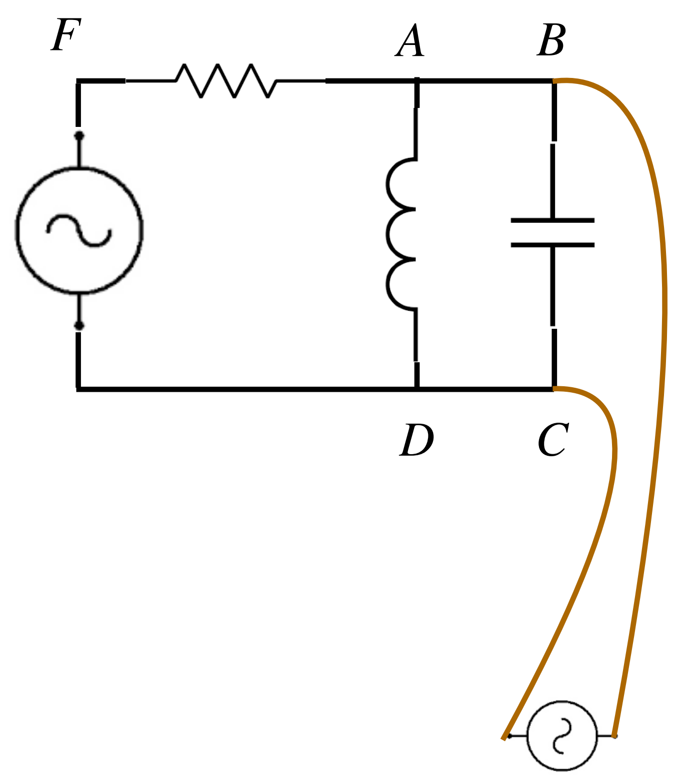
$$V_{AB/CD} = V_0 - I_0 R = V_0 \left(1 - \frac{I_0 R}{V_0}\right) = V_0 \left(1 - \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R}\right)$$

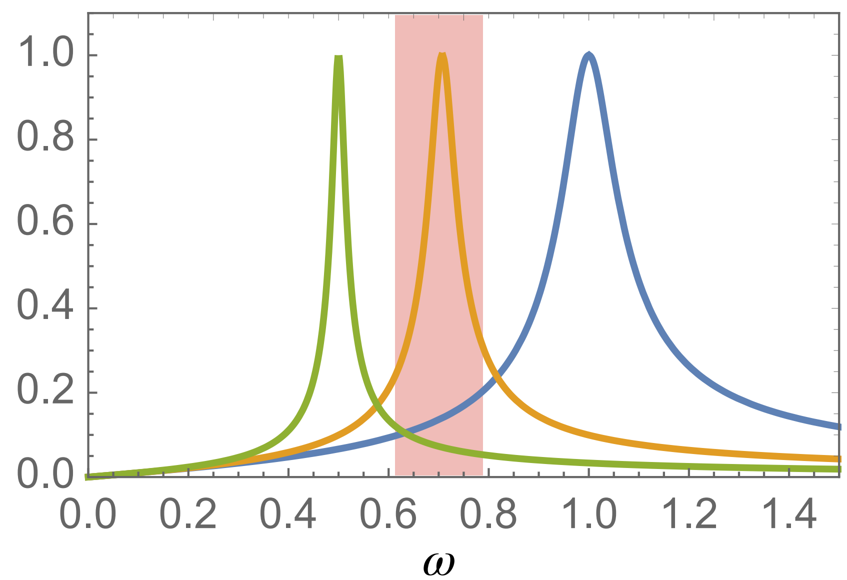
$$\Rightarrow \quad V_{AB/CD} = \frac{V_0}{R} \frac{i\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}$$



Emissoras de rádio

- Esse tipo de circuito pode ser manipulado, tanto num transmissor quanto num receptor de rádio.
- Queremos não apenas acertar a frequência de ressonância, mas também a ***largura de banda*** — o intervalo de frequências nas quais ocorre a transmissão de dados.
- Nas rádios AM ($\nu \sim$ 540-1600 kHz) temos larguras de aprox. 10 kHz
- Nas rádios FM ($\nu \sim$ 80 - 110 MHz) temos larguras de aprox. 200 kHz





Próxima aula:

- As equações de Maxwell
- O problema e a solução: a corrente de deslocamento de Maxwell
- Condições de contorno
- Transformações de Calibre

- Leitura: Griffiths, Cap. 7.3
- Leitura complementar: Jackson, Cap. 6