COMP III - 26/10/2021

RESOLUÇÃO DA PROVINHA 2

A: DIAGONAL DOMINANTE INVERSÍVEL

(a) $a_{11} \neq 0$

DA DOMINÂNCIA DIAGONAL,

$$|a_{11}| \geq \underbrace{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|}$$

→ SOMA DE NÚMEROS NÃO NEGATIVOS

SE $a_{11} = 0$, TEREMOS $\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| = 0 \Rightarrow |a_{1j}| = 0,\ 2 \leq j \leq n$

$\Rightarrow a_{11} = 0$ E $a_{1j} = 0,\ 2 \leq j \leq n$

$\Rightarrow$ TODA A 1ª LINHA DE A SERIA NULA

$\Rightarrow \det(A) = 0$, O QUE CONTRADIZ A INVERSIBILIDADE.

LOGO, $a_{11} \neq 0$ (OBS.: NA VERDADE, $a_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$)

(b) 1ª ETAPA DA ELIMIN. DE GAUSS USANDO a_{11} COMO PIVÔ:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow A'$$

MOSTRAR QUE A SUBMATRIZ $n-1 \times n-1$ A' FORMADA PELOS ELEMENTOS a'_{ij}, $2 \leq i,j \leq n$, É INVERSÍVEL.

NOTE QUE $\det(A^{(1)}) = \det(A)$, POIS $A^{(1)}$ FOI

OBTIDA DE A POR TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES SEM TROCAS DE LINHAS.

USANDO A REGRA DE LAPLACE, OBTEMOS:

$$\det(A^{(1)}) = a_{11} \cdot \det(A') = \det(A)$$

COMO $\det(A) \neq 0$, $\det(A') \neq 0$

(c) PROVE QUE A' É DIAGONAL DOMINANTE

SABEMOS QUE $a'_{ij} = a_{ij} - \overset{\text{MULTIPLICADOR}}{\frac{a_{i1}}{a_{11}}} \cdot a_{1j}$, $2 \leq i, j \leq n$

QUEREMOS MOSTRAR QUE $\displaystyle\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a'_{ij}| \leq |a'_{ii}|$, $2 \leq i \leq n$

FIXE $i \geq 2$. ENTÃO, $\quad (|a+b| \leq |a| + |b|)$

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a'_{ij}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{1j}|$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| - |a_{i1}|}_{\text{INCLUIR E SUBTRAIR } a_{i1}} + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \Bigg(\underbrace{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| - |a_{1i}|}_{\text{INCLUIR E SUBTRAIR } a_{1i}} \Bigg)$$

NOTE QUE $i \geq 2$

DOMINÂNCIA DIAGONAL $\Longrightarrow$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \le |a_{ii}| \,, \quad \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \le |a_{11}|$$

LOGO,

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |a'_{ij}| \le |a_{ii}| - \cancel{|a_{i1}|} + \cancel{|a_{i1}|} - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \cdot |a_{1i}|$$

$$= \underbrace{|a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \cdot |a_{1i}|}_{\geq 0}$$

COMO $i \geq 2$, $|a_{ii}| \geq |a_{1i}|$ E $\frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \le 1$ (DOM. DIAGONAL)

LOGO, $|a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \geq 0$.

LEMBRE-SE QUE $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$. PORTANTO,

$$|a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} |a_{1i}| \le \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| = |a'_{ii}|$$

(d) DOS ÍTENS (b) E (c) SABEMOS QUE A' É DIAGONAL DOMINANTE E INVERSÍVEL. PORTANTO $a'_{22} \neq 0$ E A SUBMATRIZ $n-2 \times n-2$ OBTIDA DO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS USANDO-SE a'_{22} COMO PIVÔ É DIAGONAL DOMINANTE E INVERSÍVEL. O

RESULTADO SEGUE POR INDUÇÃO FINITA.

(c) LEMBRE-SE QUE DA AULA SOBRE CONDENSAÇÃO PIVOTAL, A IDEIA É ESCOLHER COMO LINHA DO PIVÔ NA ETAPA k A LINHA TAL QUE A DETERMINAÇÃO DE x_k SEJA O MENOS SENSÍVEL POSSÍVEL A ERROS EM $x_{k+1}, \dots, x_n$. NA 1ª ETAPA, SE A MATRIZ É DIAGONAL DOMINANTE, ESTA LINHA É A PRIMEIRA. O MESMO CONTINUA VALENDO AO CONTINUARMOS COM A ELIMINAÇÃO DE GAUSS, POIS A ESTRUTURA DIAGONAL DOMINANTE E A INVERSIBILIDADE.

—— / ——

SUPONHA QUE A É DIAGONAL DOMINANTE E INVERSÍVEL. QUAL LINHA DE A É MENOS SENSÍVEL A ERROS NA DETERMINAÇÃO DE x_1 DEVIDO A ERROS EM $x_2, \dots, x_n$

$$a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \leq |a_{11}| \quad \left(x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)$$

$$|a_{21}| + \sum_{j=3}^{n} |a_{2j}| \leq |a_{22}| \left(x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{21}} x_j \right)$$

NA 1ª ETAPA, ESCOLHO A LINHA 1

MESMO ARGUMENTO, USANDO DOMINÂNCIA DIAGONAL E INVERSIBILIDADE, NA ETAPA k, ESCOLHO A LINHA k.

OBSERVAÇÃO: PARA MATRIZES INVERSÍVEIS GERAIS, É MUITO CUSTOSO VERIFICAR A CADA PASSO QUAL LINHA TEM SENSIBILIDADE MENOR A ERROS. NA PRÁTICA, ISTO É FEITO SOMENTE COM A PRIMEIRA LINHA, EXPLÍCITA OU IMPLICITAMENTE.

<u>EXPLICITAMENTE</u>: DIVIDA CADA LINHA DA MATRIZ PELO ELEMENTO DE MAIOR MÓDULO. USE CONDENSAÇÃO PIVOTAL.

<u>IMPLICITAMENTE</u>: A CADA ETAPA, DETERMINE QUAL SERIA A LINHA DO PIVÔ SE TIVÉSSIMOS DIVIDIDO CADA LINHA DA MATRIZ PELO RESPECTIVO ELEMENTO DE MAIOR MÓDULO.