Computação III - 2º Semestre de 2021

Provinha 2 - 21/10/2021

Envie a sua resposta digitalizada para nmkuhl@usp.br.

Questão

Dizemos que uma matriz quadrada A $n \times n$ é diagonal dominante se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Suponha então que A é diagonal dominante e *inversível*.

(a) Prove que $a_{11} \neq 0$.

(b) Fazendo-se a primeira etapa da triangularização de A pelo método de eliminação de Gauss, com a_{11} como pivô, obtemos uma matriz com a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prove que a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ formada pelos coeficientes a'_{ij}, $2 \leq i, j \leq n$ é inversível.

(c) Prove que esta mesma submatriz é diagonal dominante.

(d) Prove que é possível triangularizar a matriz A pelo método de eliminação de Gauss sem trocas de linhas.

(e) Pensando agora em estabilidade numérica, se quiséssemos usar o método de eliminação de Gauss com balanceamento implícito e condensação pivotal, haveria trocas de linhas? Justifique.

Obs.: Cada item vale 0.6 pontos. Você pode resolver um item usando os resultados de itens anteriores, mesmo sem tê-los resolvido.