Continuidade Uniforme

Def. $f : A \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dizemos que f é uniformemente contínua se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre que $x, y \in A$ e $|x - y| < \delta$.

OBS: Note que se A é um intervalo aberto e f é uniformemente contínua em A, então f é contínua em cada $p \in A$.

Exemplos: 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. f é contínua $\mathbb{R} - \{0\}$

mas não é uniformemente contínua. Com efeito $\forall\, \varepsilon_0 > \epsilon (0,2)$ e $\forall\, \delta > 0$ existe $x = \delta/3$ e $y = -\delta/3$ tal que

$$|f(x) - f(y)| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon_0.$$

Note que $|x - y| = 2\delta/3 < \delta$

2) $f(x) = 1/x$, $x > 0$. f é contínua mas é unif. cont.

De fato, $\forall\, \varepsilon_0 \in (0,1)$ e $\forall\, \delta > 0$ $\exists$ $n > 1/\delta$ e pontos

inteiro positivo

$x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$ tais que

$$|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1 > \varepsilon_0$$

onde $|x - y| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \delta$.

Teo. Seja $f:[a,b]\longmapsto \mathbb{R}$ função contínua. Então f é unif. contínua.

dem. Suponha falsa a afirmação i.e. $\exists\, \varepsilon_0>0$ tal que $\forall\, \delta>0$ $\exists\, x,y\in[a,b]$ distintos t.q. $|f(x)-f(y)|\geq \varepsilon_0$ com $|x-y|<\delta$.

Seja c pt. médio de a,b

$c = a_1 = a_2$

$c_2 = a_3$

$c_1 = b_2 = b_3 \ \dots$

$b = b_1$

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots$

$\dots\supset[a_n,b_n]\supset\dots$

$\forall\, n\in\mathbb{N}$

Seja agora $S = \{a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset [a, b]$

$\rightsquigarrow \exists \ \alpha = \sup S \in [a, b]$.

Note que $|[a_n, b_n]| = b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$ e f é contínua em α.

Assim, dado $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \ \delta > 0$ tal que

$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_0$ sempre que $|x - \alpha| < \delta$.

Logo, $\exists n_0$, tal que $b_n - a_n < \delta/2 \ \forall \ n \geq n_0$

onde $|f(x) - f(y)| < \varepsilon < \varepsilon_0 \ \forall \ x, y$ em $N(\alpha) = (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

já que $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(\alpha)| + |f(y)-f(\alpha)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad x, y \in N(\alpha).$$

Em particular $\forall x, y \in [a_n, b_n]$ com $n \geq n_0$.

Corolário: Seja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável.

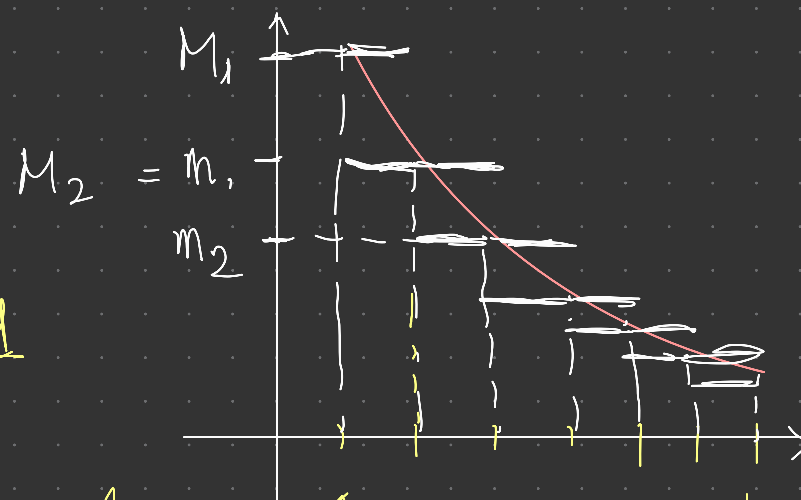
dem. $P = \{x_0, x_2, \dots, x_n\}$ partição de $[a,b]$ com $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

f contínua em $[a,b] \rightsquigarrow f$ é contínua $[x_i, x_{i+1}]$.

$\therefore$ para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$ consideramos $M_i = \max\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$

e $m_i = \min\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$. (Pelo Teo. de Weierstrass)

Definimos as funções escadas



$s_n(x) = m_i \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$

↑ inferior $\quad i = 0, 1, \dots, n-1$

$t_n(x) = M_i \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$

↑ superior $\quad s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$ em $[a,b]$

f é ctdo $\therefore \exists\ \underline{I}(f)$ e $\overline{I}(f)$. PM $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

$$0 < \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx \leq \int_a^b (t_n - s_n)(x)\,dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t_n - s_n)(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (M_i - m_i)\,dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,\frac{(b-a)}{n}$$

$$M_i = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(c_i)$$ para algum par

$$m_i = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(d_i)$$ c_i, d_i em $[x_i, x_{i+1}]$

Note f é unif. contínua. Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre $|x - y| < \delta$ em $[a, b]$

$\therefore$ se n é tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$, então $M_i - m_i < \varepsilon$.

Logo $0 < \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \frac{(b-a)}{n}$

$$< \varepsilon \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \varepsilon \frac{(b-a)}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \varepsilon (b-a)$$

$\not\exists n$

Com $\varepsilon > 0$ arbitrário $\rightsquigarrow$ $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int_a^b f$. $\blacksquare$