ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Dinâmica do Sólido – Parte 1b

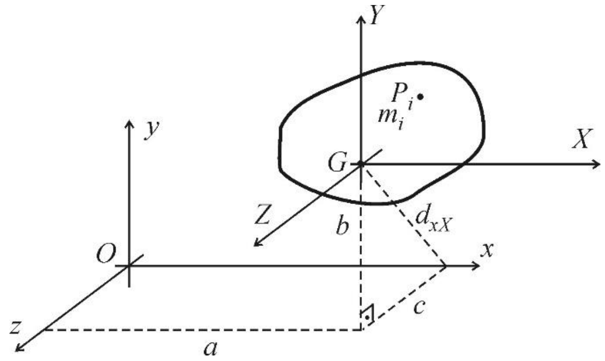
Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

DINÂMICA DO SÓLIDO

3. Momentos e Produtos de Inércia (continuação)

- Translação de eixos



Sejam *X,Y,Z* eixos cuja origem é o centro de massa *G* do sistema, e *x,y,z* eixos paralelos a *X,Y,Z* respectivamente, com origem em um ponto *O* qualquer. Sejam (*a,b,c*) as coordenada de G em *Oxyz*.

O momento de inércia em relação ao eixo *Ox* será:

$$J_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i[(b + Y_i)^2 + (c + Z_i)^2] =$$

$$= \sum_i m_i(Y_i^2 + Z_i^2) + 2b\sum_i m_i Y_i + 2c\sum_i m_i Z_i + (b^2 + c^2)\sum_i m_i$$

Mas:

$$\sum_i m_i(Y_i^2 + Z_i^2) = J_X$$

$$\sum_i m_i Y_i = mY_G = 0$$

$$\sum_i m_i Z_i = mZ_G = 0$$

$$\sum_i m_i = m$$

$(b^2 + c^2) = d_{xX}^2 =$ quadrado da distância entre os eixos *x* e *X*

Portanto:

$$J_x = J_X + md_{xX}^2$$

Analogamente:

$$J_y = J_Y + md_{yY}^2$$

$$J_z = J_Z + md_{zZ}^2$$

Para os produtos de inércia:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \sum_i m_i(a + X_i)(b + Y_i) =$$

$$= \sum_i m_i X_i Y_i + a\sum_i m_i Y_i + b\sum_i m_i X_i + ab\sum_i m_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{xy} = J_{XY} + mab$$

Analogamente:

$$J_{yz} = J_{YZ} + mbc$$

$$J_{zx} = J_{ZX} + mca$$

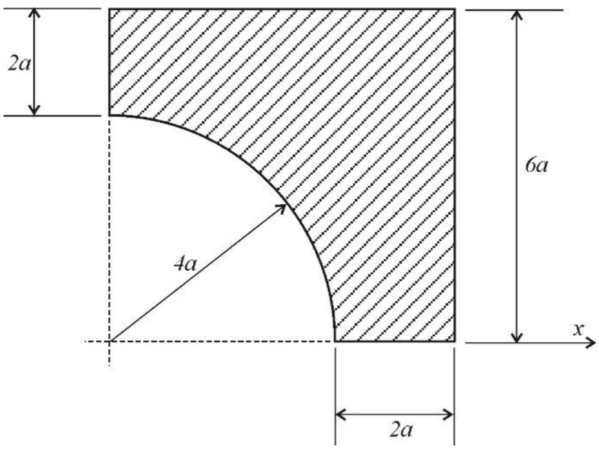
Note-se que, para esta transformação, *X,Y,Z* <u>*devem sempre ter a origem*</u> no centro de massa *G*.

Destas equações conclui-se que, para um sistema de eixos de mesma direção, o menor momento de inércia corresponde ao eixo que passa pelo centro de massa do sistema.

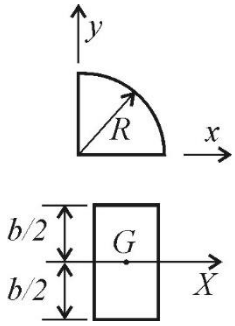
Matriz de inércia (definição):

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo 3.1</u>: Determine o momento de inércia e o raio de giração em relação ao eixo *x* da figura abaixo, sendo σ a densidade superficial da figura.



Dados:

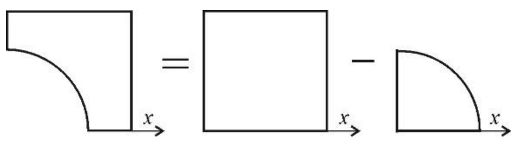


$$J_x = \frac{MR^2}{4}$$

$$J_X = \frac{Mb^2}{12}$$

Resolução:

A maneira mais simples de se calcular o momento de inércia, neste caso, é por composição:



$$J_{x,figura} = J_{x,quadrado} - J_{x,semicirculo}$$

$J_{x,quadrado}$: Quadrado de lado 6*a*

$$M = (6a \cdot 6a)\sigma = 36a^2\sigma$$

$$J_X = \frac{M(6a)^2}{12} = 108a^4\sigma$$

Translação de eixos:

$$J_{x,quadrado} = J_X + M\left(\frac{6a}{2}\right)^2 = 108a^4\sigma + 324a^4\sigma = 432a^4\sigma$$

$J_{x,semicirculo}$:

$$M = \pi\frac{(4a)^2}{4}\sigma = 4\pi a^2\sigma$$

$$J_{x,semicirculo} = \frac{MR^2}{4} = 16\pi a^4 \sigma$$

Portanto, fazendo a composição:

$$\boldsymbol{J_x = 432a^4\sigma - 16\pi a^4\sigma = 16(27-\pi)a^4\sigma}$$

e, com a massa:

$$M = 36a^2\sigma - 4\pi a^2\sigma = 4(9-\pi)a^2\sigma$$

temos o raio de giração:

$$r_x^2 = \frac{J_x}{M} = \frac{4(27-\pi)}{9-\pi}a^2 \Rightarrow \boldsymbol{r_x = 2a\sqrt{\frac{27-\pi}{9-\pi}}}$$