Primeira Lista de Exercícios – Macroeconomia IV

Mauro Rodrigues
Departamento de Economia – FEA/USP

1. Ljungqvist and Sargent (2nd edition), cap. 8, Problemas 8.2 e 8.9.

2. Considere o modelo de precificação de ativos de Lucas. Especificamente, o tempo é discreto e indexado por $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. A economia é composta por um grande número de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. O agente representativo vive para sempre e possui as seguintes preferências sobre a sequência de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$:
$$U_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} \right\}$$
Os frutos de uma árvore de Lucas, denotados pela sequência estocástica $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, constituem o produto desta economia. Em um dado período t, o produto corrente y_t é observável, mas os produtos futuros são incertos. O processo estocástico do produto é iid ao longo do tempo.

   Em cada instante t, o agente representativo possui s_t ações da árvore, as quais dão direito a uma fração s_t do produto em t. Esta renda pode ser usada para consumo ou para adquirir novas ações, de modo que a restrição orçamentária no período t seja dada por:
$$c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) \leq s_t y_t$$
sendo que p_t é o preço de uma ação da árvore em t. Em equilíbrio $c_t = y_t$ e $s_t = 1$, para todo $t \in \{0, 1, 2, ...\}$.

   (a) Escreva o problema do agente representativo na forma recursiva. Calcule as condições de primeira ordem e a equação de Euler.

   (b) Defina o equilíbrio competitivo recursivo.

(c) Mostre que, em equilíbrio, o preço da ação no período t é dado por:

$$q_t = \frac{\beta E\{y_{t+1}^{1-\gamma} + y_{t+1}^{-\gamma} p_{t+1}\}}{y_t^{-\gamma}}$$

(d) Com base na expressão da parte (c), mostre que:

$$q_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j E(y_{t+j}^{1-\gamma})}{y_t^{-\gamma}} + \lim_{j\to\infty} \frac{\beta^j E(y_{t+j}^{-\gamma} p_{t+j})}{y_t^{-\gamma}}$$

Explique porque o termo limite deve ser zero em equilíbrio.

(e) Suponha que o produto siga uma distribuição log-normal, ou seja:

$$\ln y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Isto implica que $E(y_t) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$. Dado este processo para a renda, calcule p_t em termos de y_t e dos parâmetros desta economia.

(f) Agora suponha que, no período t, o processo da renda torne-se mais produtivo, isto é:

$$\ln y_t \sim N(10\mu, \sigma^2)$$

Em quais circunstâncias o preço da ação aumenta, cai, ou permanece constante? Interprete.

3. Considere um modelo com apenas dois períodos: $t = 0$ e $t = 1$. Há dois indivíduos, X e Z. No primeiro período, os dois agentes recebem como dotação $y_0^X = y_0^Z = 1$ com certeza. No segundo período, a dotação é incerta, sendo que há dois estados da natureza, s_A e s_B. No estado s_A, as dotações são:

$$y_1^X(s_A) = 1 + \sigma;\; y_1^Z(s_A) = 1 - \sigma$$

Já no estado s_B, a situação se inverte, i.e.:

$$y_1^X(s_B) = 1 - \sigma;\; y_1^Z(s_B) = 1 + \sigma$$

Em que $0 < \sigma < 1$. Note que não há incerteza agregada. Suponha inicialmente uma estrutura de **mercados completos**, ou seja, no período $t = 0$ há dois ativos contingentes: um deles (b_A) paga 1 unidade de consumo em $t = 1$, se o estado s_A ocorrer, e zero caso contrário; o outro ativo paga 1 unidade de consumo se s_B ocorrer, e zero caso contrário. As restrições orçamentárias do agente $i = X, Z$ são, assim:

$$\begin{aligned} c_0^i + q_A b_A^i + q_B b_B^i = y_0^i = 1 \\ c_1^i(s_A) = y_1^i(s_A) + b_A^i \\ c_1^i(s_B) = y_1^i(s_B) + b_B^i \end{aligned}$$

Em que b_A^i e b_B^i são as quantidades de cada ativo contingente que o agente i decide reter, e q_A e q_B são os preços desses ativos. Suponha probabilidades iguais de ocorrência dos dois estados, i.e., $\pi(s_A) = \pi(s_B) = 1/2$. Os agentes têm a mesma função utilidade, que é dada por:

$$U^i = \ln c_0^i + \beta E \ln c_1^i = \ln c_0^i + \beta \left\{ \frac{1}{2} \ln c_1^i(s_A) + \frac{1}{2} \ln c_1^i(s_B) \right\}$$

(a) Monte o problema do agente $i = X, Z$. Obtenha as condições de ótimo.

Em equilíbrio:

$$\begin{aligned} & c_0^X + c_0^Z = c_1^X(s_A) + c_1^Z(s_A) = c_1^X(s_B) + c_1^Z(s_B) = 2 \\ & b_A^X + b_A^Z = b_B^X + b_B^Z = 0 \end{aligned}$$

(b) Encontre os preços dos ativos em função dos parâmetros da economia.

(c) Com base nos ativos dessa economia, explique como é possível construir um ativo livre de risco. Calcule a taxa de juros livre de risco em função dos parâmetros da economia.

Suponha agora uma situação de **mercados incompletos**, em que há apenas um ativo, que paga 1 unidade de consumo no segundo período independente da realização do estado da natureza. Nesse caso, as restrições orçamentárias do agente $i = X, Z$ são, assim:

$$\begin{aligned} c_0^i + qb^i &= y_0^i = 1 \\ c_1^i(s_A) &= y_1^i(s_A) + b^i \\ c_1^i(s_B) &= y_1^i(s_B) + b^i \end{aligned}$$

Em que q é o preço do ativo e b^i é a quantidade que o indivíduo $i = X, Z$ decide segurar desse ativo.

(d) Monte o problema do agente $i = X, Z$. Obtenha as condições de ótimo.

(e) Explique porque, em equilíbrio, $b^X = b^Z = 0$. Dada essa condição, calcule a taxa de juros livre de risco.

(f) Em equilíbrio, como a taxa de juros livre de risco de mercados incompletos (em (e)) se compara com a de mercados completos (em (c))? Interprete.

4. (Comprometimento limitado) Uma economia possui dois indivíduos: a e b. Em cada período t, o indivíduo $i = a, b$ recebe uma dotação y_t^i. No período $t = 0$, ambos os indivíduos recebem $y_0^a = y_0^b = 1$ com certeza. Nos períodos seguintes, a dotação de cada indivíduo passa a ser estocástica, seguindo a distribuição (iid ao longo do tempo):

$$(y_t^a, y_t^b) = \begin{cases} (1+\phi, 1-\phi), \text{ com probabilidade } 1/2 \\ (1-\phi, 1+\phi), \text{ com probabilidade } 1/2 \end{cases}$$

Note que não há incerteza agregada, de modo que a restrição de recursos seja:

$$c_t^a + c_t^b \leq y_t^a + y_t^b = 2$$

Os indivíduos possuem preferências idênticas, dadas por:

$$U^i = E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i), \qquad i = a, b$$

Em que $\beta = 0{,}5$ e $u(c) = -1/c$. Assuma inicialmente $\phi = 0{,}4$. O planejador central escolhe a alocação de consumo $\{c_t^a, c_t^b\}_{t=0}^{\infty}$ que maximiza:

$$W = 0{,}5U^a + 0{,}5U^b$$

(a) Resolva o problema do planejador central. Calcule a alocação de consumo entre os indivíduos ao longo do tempo.

Suponha agora que, em cada ponto do tempo t, os indivíduos têm a opção de não obedecer a alocação proposta pelo planejador central. Mais precisamente, um indivíduo observa sua dotação em t, e decide continuar com o plano proposto, ou desviar e consumir sua própria dotação. Como punição pelo desvio, o planejador central deixa de transferir recursos para este indivíduo para sempre, de modo que o mesmo deve consumir a própria dotação em todos os períodos consecutivos.

Seja $\{c_t^a, c_t^b\}_{t=0}^{\infty}$ um plano de consumo proposto pelo planejador. No período t, um indivíduo $i = a, b$ decide seguir o plano se:

$$u(c_t^i) + \beta E \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(c_s^i) \geq u(y_t^i) + \beta E \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(y_s^i)$$

O plano $\{c_t^a, c_t^b\}_{t=0}^{\infty}$ é implementável caso a equação acima seja válida para todo $t \geq 0$ e $i = a, b$.

(b) Mostre que o plano de consumo da parte (a) não é implementável.

(c) Resolva o problema restrito do planejador central, ou seja, calcule a alocação de consumo *implementável* que maximiza $W = 0{,}5U^a + 0{,}5U^b$.

Dica: Para $t \geq 1$, assuma um plano de consumo caracterizado por:

$$(c_t^a, c_t^b) = \begin{cases} (1+\varepsilon, 1-\varepsilon), \text{ se } (y_t^a, y_t^b) = (1+\phi, 1-\phi) \\ (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \text{ se } (y_t^a, y_t^b) = (1-\phi, 1+\phi) \end{cases}$$

Calcule ε.

(d) Refaça a parte (c) assumindo (i) $\phi = 0{,}45$, e (ii) $\phi = 0{,}50$.

(e) Com base nos seus resultados da parte (d), avalie como a alocação de consumo reage a mudanças no parâmetro ϕ. Interprete intuitivamente.