Modelo de Lucas / Equity Premium Puzzle

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Entender preços de ações
- Equity premium: retorno de ações tende a ser mais alto do que de títulos públicos
- Agentes são avessos ao risco
  - Retorno de ações é mais volátil e positivamente correlacionado com o estado da economia
  - Títulos públicos = ativo livre de risco
- Quantitativamente, qual o grau de aversão ao risco necessário para gerar a diferença de retorno entre ações e títulos públicos?

Modelo de Lucas

- Economia de dotação
- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos no intervalo $[0, 1]$
- Cada agente possui uma árvore
- No início de cada período t, cada árvore produz dividendos ("frutos") y_t (não estocável)

$$y_t \in \{y_1, y_2, y_3, \ldots y_n\} \equiv Y$$

- y_t segue processo de Markov, com distribuição $f(y_{t+1}|y_t)$
  - Elementos de uma matriz de transição P
- y_0 dado

Ativos

Dois tipos de ativos:

- Ativo sem risco: b
  - Paga 1 unidade de consumo no período seguinte, independente do estado da natureza
  - b_{t+1}: ativos adquiridos em t, e que vencerão em $t+1$
  - q_t: preço do ativo adquirido em t
- ações ("shares") da árvore: s
  - Prometem pagar uma sequência de dividendos, que dependem da realização da dotação agregada
  - Agente com s_t ações recebe $s_t y_t$ na forma de dividendos no período t
  - p_t: preço da ação em t

Agente representativo

- Preferências:

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

- Restrição orçamentária em t:

$$c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) + q_t b_{t+1} \leq b_t + s_t y_t$$

- $s_0 = 1,\ b_0 = 0,\ y_0$ são dados
  - Variáveis de estado

Agente representativo

- Lado direito da restrição orçamentária: fontes de recursos do agente em t
  - b_t = Títulos adquiridos em $t-1$, e que vencem em t
  - $s_t y_t$ = Dividendos das ações recebidos em t

- Lado esquerdo da restrição orçamentária: usos desses recursos em t
  - c_t = consumo
  - $p_t(s_{t+1} - s_t)$ = aquisição de novas ações em t (com sinal negativo se ações são vendidas)
  - $q_t b_{t+1}$ = aquisição de títulos que vencerão em $t+1$

- Em equilíbrio, como os agentes são idênticos:

$$s_t = 1$$
$$b_t = 0$$
$$c_t = y_t$$

Equação de Bellman

- Variáveis de estado:
  - Estado individual: s, b
  - Estado agregado: y
- Funções preço: $p(y), q(y)$
- Problema do agente representativo:

$$
\begin{aligned}
V(s,b,y) = \max_{c,s',b'} \quad & u(c) + \beta \mathbb{E}[V(s',b',y')|y] \\
\text{s.a:} \quad & c + p(y) \cdot (s' - s) + q(y) \cdot b' \leq b + sy
\end{aligned}
$$

  - y' segue um processo de Markov com distribuição $f(y'|y)$

Equação de Bellman

$$V(s,b,y) = \max_{s',b'} \Big\{ u\left(b + sy - p(y)\cdot(s'-s) - q(y)\cdot b'\right) + \beta \sum_{y' \in Y} \left[V(s',b',y') \cdot f(y'|y) \right] \Big\}$$

CPO's:

[s']: $$u_c p(y) = \beta \sum_{y' \in Y} \left[V_1(s',b',y') \cdot f(y'|y) \right]$$

[b']: $$u_c q(y) = \beta \sum_{y' \in Y} \left[V_2(s',b',y') \cdot f(y'|y) \right]$$

Equação de Bellman

Envelope:

$$V_1(s,b,y) = u_c \cdot [p(y) + y]$$
$$V_2(s,b,y) = u_c$$

Adiantando um período:

$$V_1(s',b',y') = u_{c'} \cdot \left[p(y') + y'\right]$$
$$V_2(s',b',y') = u_{c'}$$

Agente Representativo

Temos, então:

$$u_c p(y) = \beta \sum_{y' \in Y} \left[u_{c'} \cdot (p(y') + y') \cdot f(y'|y) \right]$$

$$p(y) = \beta \frac{\mathbb{E}\left[u_{c'} \cdot (p(y') + y') \,|y \right]}{u_c}$$

$$\boxed{p_t = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u_{c,t+1}}{u_{c,t}} \cdot (p_{t+1} + y_{t+1}) \right]}$$

e:

$$u_c q(y) = \beta \sum_{y' \in Y} \left[u_{c'} \cdot f(y'|y) \right]$$

$$q(y) = \beta \frac{\mathbb{E}\left[u_{c'} \,|y \right]}{u_c}$$

$$\boxed{q_t = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u_{c,t+1}}{u_{c,t}} \right]}$$

Equilíbrio Competitivo Recursivo

1. Uma função valor $V(s, b, y)$
2. Regras de decisão para agente representativo: $c(s, b, y)$, $s'(s, b, y)$, $b'(s, b, y)$
3. Funções preços: $q(y)$, $p(y)$

Tais que:

- Dado (3), (2) resolve o problema do agente representativo
- Mercados em equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
b'(s, b, y) &= 0 \\
s'(s, b, y) &= 1 \\
b &= 0 \\
s &= 1 \\
c &= y
\end{aligned}
$$

Preço da Ação

$$p_t = \frac{\beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot (p_{t+1} + y_{t+1}) \right]}{u_{c,t}} \Rightarrow$$

$$u_{c,t} p_t = \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot p_{t+1} \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot y_{t+1} \right] \tag{1}$$

- Adiantando um período:

$$u_{c,t+1} p_{t+1} = \beta \mathbb{E}_{t+1} \left[u_{c,t+2} \cdot p_{t+2} \right] + \beta \mathbb{E}_{t+1} \left[u_{c,t+2} \cdot y_{t+2} \right]$$

- Aplicando $\mathbb{E}_t(\cdot)$ dos dois lados:

$$\mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot p_{t+1} \right] = \beta \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+1} \left[u_{c,t+2} \cdot p_{t+2} \right] \right\} + \beta \mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+1} \left[u_{c,t+2} \cdot y_{t+2} \right] \right\}$$

Preço da Ação

- Da lei das expectativas iteradas:

$$\mathbb{E}_t \left\{ \mathbb{E}_{t+1} \left[X_{t+2} \right] \right\} = \mathbb{E}_t \left[X_{t+2} \right]$$

- Logo:

$$\mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot p_{t+1} \right] = \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot p_{t+2} \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot y_{t+2} \right]$$

- Substituindo na eq. (1):

$$\begin{aligned} u_{c,t} p_t &= \beta \left\{ \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot p_{t+2} \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot y_{t+2} \right] \right\} + \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot y_{t+1} \right] \\ &= \beta^2 \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot p_{t+2} \right] + \beta^2 \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+2} \cdot y_{t+2} \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+1} \cdot y_{t+1} \right] \end{aligned}$$

- Repetindo o procedimento infinitas vezes:

$$p_t u_{c,t} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+j} \cdot y_{t+j} \right] + \lim_{j \to \infty} \beta^j \mathbb{E}_t \left[u_{c,t+j} \cdot p_{t+j} \right]$$

Preço da Ação

- Em equilíbrio:

$$\underbrace{p_t u'(y_t)}_{(A)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \mathbb{E}_t \left[u'(y_{t+j}) \cdot y_{t+j} \right]}_{(B)} + \underbrace{\lim_{j \to \infty} \beta^j \mathbb{E}_t \left[u'(y_{t+j}) \cdot p_{t+j} \right]}_{(C)}$$

- Em equilíbrio, agentes devem segurar sua dotação inicial (i.e., $s_t = 1$), para sempre
  - Isso implica que (C) deve ser igual a zero
- Na expressão acima:
  - (A) = ganho marginal de vender ações, em $s_t = 1$
  - (B) = utilidade marginal de segurar 1 ação para sempre

Preço da Ação

- Se (C) positivo, i.e., (A) $>$ (B), então agentes gostariam de vender ações
- Se (C) negativo, i.e., (A) $<$ (B), então agentes gostariam de comprar ações
  - Essas duas situações são inconsistentes com equilíbrio de mercado
- Logo:

$$\boxed{p_t = \mathbb{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j u'(y_{t+j})}{u'(y_t)} \cdot y_{t+j}\right]}$$

- Ou seja, preço da ação é o valor presente esperado dos dividendos futuros

Equity Premium Puzzle

- Mehra & Prescott (1985). "The equity premium: A puzzle." *Journal of Monetary Economics*.
- Entender quantitativamente diferenças de retorno entre ações e títulos públicos
  - Mercados completos
  - Utilidade CRRA
- Referência da aula: Romer, 3rd edition, cap.7.

Preços de ativos

- Considere um ativo qualquer e

$$p_t^e = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u'(c_{t+1}) d_{t+1}^e}{u'(c_t)} \right] \tag{2}$$

- No caso de ações:

$$d_{t+1}^e = p_{t+1} + y_{t+1}$$

- Retorno do ativo e:

$$r_{t+1}^e = \frac{d_{t+1}^e}{p_t^e} - 1$$

- Substituindo na eq. (2):

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}^e)}{u'(c_t)} \right] \tag{3}$$

Preço de ativos

- g_t: taxa de crescimento do consumo

$$g_{t+1} = \frac{c_{t+1}}{c_t} - 1$$

- Utilidade do indivíduo: CRRA

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \Rightarrow u'(c) = c^{-\gamma}$$

- Substituindo na eq. (3):

$$1/\beta = \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} (1 + r^e_{t+1}) \right] \Leftrightarrow$$

$$1/\beta = \mathbb{E}_t \left[(1 + g_{t+1})^{-\gamma} (1 + r^e_{t+1}) \right]$$

- Supondo g e r iid ao longo do tempo (expectativa condicional = expectativa não condicional)

$$1/\beta = \mathbb{E} \left[(1 + g_{t+1})^{-\gamma} (1 + r^e_{t+1}) \right]$$

Expansão de Taylor

$$F(r,g) = (1+g)^{-\gamma}(1+r)$$

- Expansão de Taylor de 2ª ordem em torno de $r = g = 0$:

$$F(r,g) \approx F(0,0) + \left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_{(0,0)} \cdot (r-0) + \left.\frac{\partial F}{\partial g}\right|_{(0,0)} \cdot (g-0) +$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right|_{(0,0)} \cdot (r-0)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial g^2}\right|_{(0,0)} \cdot (g-0)^2 + \left.\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial g}\right|_{(0,0)} \cdot (r-0)(g-0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = (1+g)^{-\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial g} = -\gamma(1+g)^{-\gamma-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} = -\gamma(1+r)(1+g)^{-\gamma-1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial g^2} = \gamma(\gamma+1)(1+r)(1+g)^{-\gamma-2}$$

Expansão de Taylor

- Substituindo:

$$F(r,g) \approx 1 + r - \gamma g + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)g^2 - \gamma rg$$

- Logo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(1+g)^{-\gamma}(1+r)\right] &\approx 1 + \mathbb{E}(r) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathbb{E}(g^2) - \gamma\mathbb{E}(rg)\\ &= 1 + \mathbb{E}(r) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\left[\mathrm{var}(g) + \{\mathbb{E}(g)\}^2\right]\\ &- \gamma[\mathrm{cov}(r,g) + \mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)]\end{aligned}$$

- Como $\mathbb{E}\left[(1+g)^{-\gamma}(1+r^e)\right] = 1/\beta$, temos:

$$\begin{aligned}1/\beta \approx 1 + \mathbb{E}(r^e) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\left[\mathrm{var}(g) + \{\mathbb{E}(g)\}^2\right]\\ - \gamma[\mathrm{cov}(r^e,g) + \mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)]\end{aligned}$$

Expansão de Taylor

- Com períodos de tempo curtos, $\mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)$ e $\{\mathbb{E}(g)\}^2$ são pequenos em relação aos demais. Logo:

$$\mathbb{E}(r^e) \approx 1/\beta - 1 + \gamma\mathbb{E}(g) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathrm{var}(g) + \gamma.\mathrm{cov}(r^e, g)$$

- Para um outro ativo f qualquer:

$$\mathbb{E}(r^f) \approx 1/\beta - 1 + \gamma\mathbb{E}(g) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathrm{var}(g) + \gamma.\mathrm{cov}(r^f, g)$$

- Diferença de retornos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r^e) - \mathbb{E}(r^f) &\approx \gamma\left[\mathrm{cov}(r^e, g) - \mathrm{cov}(r^f, g)\right]\\ &= \gamma.\mathrm{cov}(r^e - r^f, g)\end{aligned}$$

Mehra & Prescott (1985)

- U.S. 1890 -1979
- Ações: S&P 500, incluindo dividendos
- Ativo livre de risco: títulos de curto prazo do tesouro americano
- g: taxa de crescimento do consumo per capita (não duráveis + serviços)
- e: ações
- f: ativo livre de risco

Equity Premium Puzzle

- Equity Premium: $\mathbb{E}(r^e) - r^f \approx 6\%$
- Excesso de retorno:

$$\begin{aligned} \sigma_{r^e - r^f} &= 16.7\% \\ \mathrm{corr}(r^e - r^f, g) &= 0.40 \\ \sigma_g &= 3.6\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(r^e - r^f, g) &= \mathrm{corr}(r^e - r^f, g) \cdot \sigma_{r^e - r^f} \cdot \sigma_g \\ &= 0.40 \cdot 0.167 \cdot 0.036 \\ &= 0.0024 \end{aligned}$$

- Temos, então:

$$6\% = \gamma \cdot 0.0024 \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma \approx 25}$$

Equity Premium Puzzle

- Esse valor implica uma taxa de aversão ao risco muito alta
- Exemplo: loteria que paga $\bar{c}$ com prob. $1/2$, e $0.8\bar{c}$ com prob. $1/2$.
  - Se $\gamma = 25$, quanto um indivíduo estaria disposto a abrir mão para evitar esse risco?
- Considerar loteria que paga $\lambda\bar{c}$, com certeza
  - Indivíduo indiferente entre as duas loterias
- λ é tal que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{c}^{-24}-1}{-24}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{(0.8\bar{c})^{-24}-1}{-24}\right)=\frac{(\lambda\bar{c})^{-24}-1}{-24}$$

$$\lambda = 0.82$$

Equity Premium Puzzle

- O valor $\gamma = 25$ consegue gerar uma diferença de retorno com magnitude como nos dados
- No entanto, produz taxas de retorno com magnitudes elevadas
  - Indivíduos muito intolerantes a variar consumo no tempo, demandam taxas elevadas
- Risk-free puzzle: taxa de juros livre de risco muito elevada, quando comparada aos dados

$$\mathbb{E}(r^f) \approx 1/\beta - 1 + \gamma \mathbb{E}(g) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathrm{var}(g) + \gamma.\mathrm{cov}(r^f, g)$$