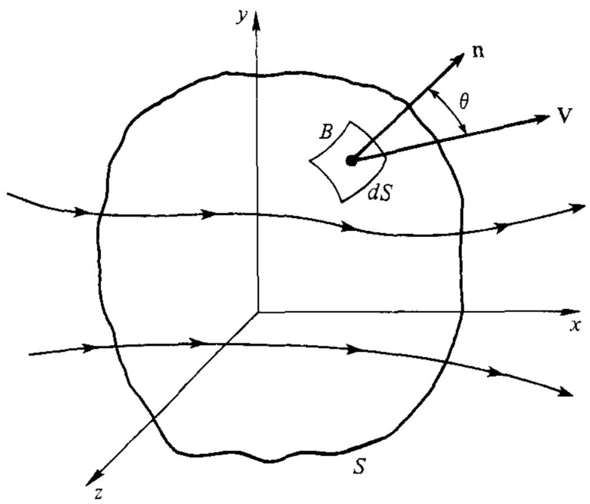
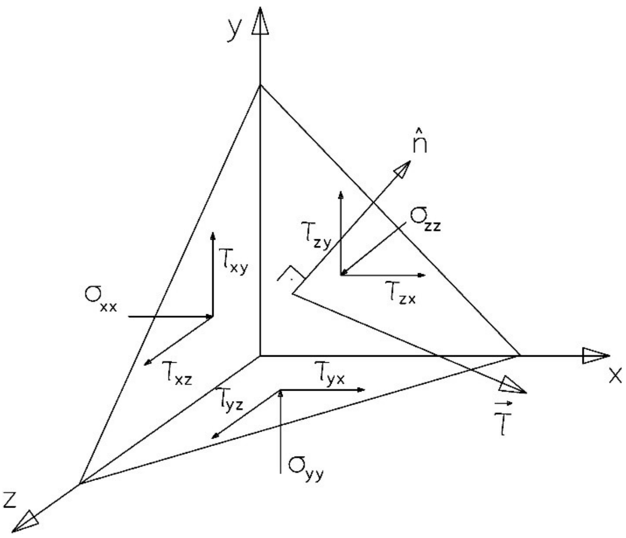
DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

Considere um volume de controle arbitrário mas fixo (estático), $\mathcal{V}$, delimitado por uma superfície de controle, S, em um campo tridimensional com coordenadas cartesianas. O fluido pode atravessar a superfície de controle e tem uma certa velocidade, $\vec{V}$, em cada elemento de superfície, dS, e tem componentes cartesianas u, v e w nas direções x, y e z, respectivamente. A direção normal ao elemento de superfície é dada por um versor, $\hat{n}$, que é definido como positivo no sentido de dentro para fora do volume de controle. O fluido está sujeito a um campo de tensões de cisalhamento, $\tilde{\tau}$, e a um campo de pressões, p.



$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad , \quad \hat{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad , \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

A correspondência entre o tensor de tensões de cisalhamento, $\tilde{\tau}$, e um vetor de tensões de cisalhamento, $\vec{\tau}$, é dada através do versor normal $\hat{n}$. Considerando um volume tetraédrico infinitesimal de fluido



a correspondência é dada por

$$\vec{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \tilde{\tau}\,\hat{n}$$

1) Conservação da massa (continuidade):

A variação da massa, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a massa saindo e entrando através da superfície de controle (vazão mássica resultante).

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\, d\mathcal{V} = -\iint \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\, dS$$

onde ρ é a densidade local (massa específica).

2) Equação da quantidade de movimento (momentum):

Da Segunda Lei de Newton: a variação da quantidade de movimento, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a quantidade de movimento saindo e entrando através da superfície de controle mais o somatório das forças externas.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\vec{V}\, d\mathcal{V} = -\iint \rho\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) dS - \iint p\hat{n}\, dS + \iint \tilde{\tau}\,\hat{n}dS + \iiint \rho\vec{f}\, d\mathcal{V}$$

onde p é a pressão local e $\vec{f}$ é chamado de força de campo (uma aceleração, na verdade). Essa força de campo inclui a aceleração da gravidade.

3) Equação da energia (1ª Lei da Termodinâmica):

A variação da energia, contida no volume de controle, é igual à diferença entre a energia saindo e entrando através da superfície de controle (convecção), mais o somatório de potências relacionadas às forças externas, e outras formas de troca de calor (condução, radiação, reações químicas, etc.).

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho E\, d\mathcal{V} = -\iint \rho E\vec{V}\cdot\hat{n}\, dS - \iint p\hat{n}\cdot\vec{V}\, dS + \iint \tilde{\tau}\hat{n}\cdot\vec{V}\, dS + \iiint \rho\vec{f}\cdot\vec{V}\, d\mathcal{V} + \iiint \rho\dot{q}\, d\mathcal{V} + \iint \kappa\nabla T\cdot\hat{n}\, dS$$

onde a energia total $E = e + V^2/2$, e é a energia interna, κ é um coeficiente de difusividade térmica, T é a temperatura local e $\dot{q}$ é uma taxa de calor sendo injetada ou retirada por radiação, reações químicas, etc.