Propriedades de limites

Teo. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x\to p} f(x) = A$ e $\lim_{x\to p} g(x) = B$.

Então:

a) $$\lim_{x\to p} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$$

b) $$\lim_{x\to p} f(x)g(x) = AB$$

c) $$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ se } B \neq 0.$$

dem.

a) $\lim\limits_{x \to p} \{f(x) + g(x)\} = A + B$

Q.M. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq.

$$|f(x) + g(x) - (A+B)| < \varepsilon$$

sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

$$|f(x) - g(x) - (A+B)| = |f(x) - A - (g(x) - B)|$$

$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

Com $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$ e $\lim\limits_{x \to p} g(x) = B$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_1$ e $\delta_2 > 0$

tq. se
$$\begin{cases} 0 < |x - p| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon/2 \\ 0 < |x - p| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \implies \lim\limits_{x \to p} \{f(x) + g(x)\} = A + B$ $\blacksquare$

b) $\lim\limits_{x \to p} f(x)g(x) = AB$

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) \mp Ag(x) - AB|$$

$$= |(f(x)-A)g(x) + A(g(x)-B)| \leq |f(x)-A||g(x)| + |g(x)-B||A|$$

(1) $\exists\, \delta_1 > 0$ tq $|g(x)| \leq 1 + |B|$ sempre que $0 < |x-p| < \delta_1$.

De fato, $\lim\limits_{x \to p} g(x) = B$, dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tq $0 < |x-p| < \delta_1$

então $1 > |g(x) - B| > ||g(x)| - |B||$ $\therefore$ $-1 < |g(x)| - |B| < 1$

$\therefore$ $|g(x)| < 1 + |B|$.

$\lim\limits_{x \to p} g(x) = B$ então g é ltda numa vizinhança de p.

(ii) $\lim_{x \to p} f(x) = A \rightsquigarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ tq.

$$0 < |x - p| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}.$$

(iii) $\lim_{x \to p} g(x) = B \Longrightarrow \exists\, \delta_3 > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta_3$

então $|g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2|A|}$.

$$\therefore |f(x)g(x) - AB| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} \cdot (1+|B|) + \frac{\varepsilon}{2|A|}|A| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

se $0 < |x - p| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. $\blacksquare$

c) $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, se $B \neq 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{B}\,\frac{B}{g(x)}$$

Por b) $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{B} = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$

Basta mostrar que $\lim_{x\to p} \frac{B}{g(x)} = 1$. Para tanto seja $h(x) = \frac{g(x)}{B}$.

Por b) $\lim_{x\to p} h(x) = 1$.

$$\frac{B}{g(x)} = \frac{1}{h(x)} \text{ e}$$

$$\left|\frac{1}{h(x)} - 1\right| = \frac{|1-h(x)|}{|h(x)|}$$

$$\left|\frac{1}{h(x)}-1\right| = \frac{|1-h(x)|}{|h(x)|}$$

Como $\lim_{x\to p} h(x) = 1$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$

tq $|h(x)-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|h(x)-1| < \frac{1}{2}$ sempre que $0 < |x-p| < \delta$.

$$|h(x)-1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < h(x)-1 < 1/2 \quad \therefore \quad h(x) > \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{1}{h(x)} < 2.$$ Logo

$$\left|\frac{1}{h(x)}-1\right| = \frac{|1-h(x)|}{|h(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon \quad \therefore \quad \lim_{x\to p}\frac{1}{h(x)} = \lim_{x\to p}\frac{B}{g(x)} = 1 \quad \blacksquare$$

Teo (Sanduíche) Suponha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \neq p$ numa vizinhança $N(p)$ de p.

Se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = A$, então $\lim_{x \to p} g(x) = A$.

__dem.__ Da desigualdade $0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$

__Afirmação.__ $\lim_{x \to p} \{g(x) - f(x)\} = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists\, \delta > 0$ tq $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |h(x) - f(x)| < \varepsilon$ já que

$$\lim_{x \to p} \{h(x) - f(x)\} = \lim_{x \to p} h(x) - \lim_{x \to p} f(x) = A - A = 0$$

Em particular, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - p| < \delta$.

$$g(x) - A = \underbrace{g(x) - f(x)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{f(x) - A}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \longrightarrow 0$$

qdo $x \to p$ qdo $x \to p$

Pela parte b) teorema anterior. $\blacksquare$

Teo (Continuidade integrais definidas) Seja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrável em $[a,x]$ $\forall x \in [a,b]$. Considere $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$, $x \in [a,b]$. Então F é contínua em $[a,b]$.

dem. QM $\lim_{x \to p} F(x) = F(p)$ $\forall p \in [a,b]$

(*) O resultado segue do teo. do Sanduiche pois $M|x-p| \to 0$ qdo $x \to p$.

$$F(x) - F(p) = \int_a^x f(s)\,ds - \int_a^p f(s)\,ds$$

Se $x > p$, então

$$F(x) - F(p) = \int_p^x f(s)\,ds \leadsto -M(x-p) \leq F(x) - F(p) \leq M(x-p)$$

já que $-M \leq f(s) \leq M$ $\forall s \in [a,b]$.

Por outro lado, $p > x \leadsto F(x) - F(p) = \int_x^p f(s)\,ds \leadsto -M(p-x) \leq F(x) - F(p) \leq M(p-x)$

$\therefore$ $0 \leq |F(x) - F(p)| \leq M|x-p|$ $\forall x \in [a,b]$. (*) ∎

Exemplo. 1) Continuidade das funções seno e cosseno.

$$\operatorname{sen} a = \int_0^a \cos x \, dx \quad e \quad \cos a = 1 - \int_0^a \operatorname{sen} x \, dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$\uparrow$ contínua

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$\therefore$ Pelo Sanduíche

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \blacksquare$$

3) Continuidade de x^r com $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (m, n inteiros positivos).

Spg supomos $x > 0$. A continuidade em $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x \leq 0 \end{pmatrix}$ segue da definição (exercício) e do fato de n ser par ou ímpar.

$$\int_0^x t^{1/n}\, dt = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \forall x > 0 \qquad \therefore \quad x^{\frac{n+1}{n}} \text{ é contínua}$$

$$g(x) = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{x}, \; x > 0 \rightsquigarrow g(x) = x^{\frac{n+1}{n} - 1} = x^{1/n}$$

$\therefore \quad x^{1/n}$ é contínua se $x > 0$. $\Longrightarrow$ $x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m$ é contínua se $x > 0$ ∎