Aula 12
Teoria dos jogos

Piracicaba, Outubro de 2021

Professora Dra. Andréia Adami

Teoria dos Jogos

- **Teoria dos Jogos**

- John Von Neumann e Oskar Morgenstein – em *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944

- John Nash (1996) - Uma mente brilhante

Teoria dos Jogos

- **Teoria dos Jogos**

✓Toda interação estratégica na qual os participantes, sejam eles organizações ou indivíduos, reconheçam a relação entre suas estratégias de forma a ponderá-las na hora da tomada de decisão pode ser considerada como um jogo;

Teoria dos Jogos

- **Teoria dos Jogos**

✓Toda interação estratégica na qual os participantes, sejam eles organizações ou indivíduos, reconheçam a relação entre suas estratégias de forma a ponderá-las na hora da tomada de decisão pode ser considerada como um jogo;

✓A teoria dos jogos ajuda a entender teoricamente o processo de tomada de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos;

Teoria dos Jogos

- **Teoria dos Jogos**

✓Toda interação estratégica na qual os participantes, sejam eles organizações ou indivíduos, reconheçam a relação entre suas estratégias de forma a ponderá-las na hora da tomada de decisão pode ser considerada como um jogo;

✓A teoria dos jogos ajuda a entender teoricamente o processo de tomada de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos;

✓A teoria dos jogos ajuda a desenvolver a capacidade de raciocinar estrategicamente, explorando as possiblidades de interação dos agentes, possibilidades estas que nem sempre correspondem à intuição.

(FIANI, R.; 6ª ed.)

Teoria dos Jogos

- **Elementos**

✓Jogador (player): é o tomador de decisão, pode ser um indivíduo, uma empresa ou uma nação;

✓Estratégia: cada ação disponível ao jogador;

✓Payoff: resultado final para cada jogador.

Teoria dos Jogos

- **Elementos**

✓Jogador (player): é o tomador de decisão, pode ser um indivíduo, uma empresa ou uma nação;

✓Estratégia: cada ação disponível ao jogador;

✓Payoff: resultado final para cada jogador.

- Cada unidade de decisão em um jogo é chamada de jogador e cada jogador pode escolher entre diferentes ações, chamadas de estratégias, que levam a diferentes resultados ou payoffs.

Teoria dos Jogos

- **Elementos**

		JOGADOR 2	
		ESTRATÉGIA A	ESTRATÉGIA B
JOGADOR 1	ESTRATÉGIA A	(p1;p2)	(p1;p2)
	ESTRATÉGIA B	(p1;p2)	(p1;p2)

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**

- Um dos jogos mais famosos estudados na teoria dos jogos, dois suspeitos são presos por um crime e o promotor quer extrair uma confissão, para isso oferece um acordo.

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**

• O acordo

✓Se um dos suspeitos confessar, mas seu companheiro não, este recebe uma sentença de um ano e seu companheiro uma sentença de quatro anos;

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**

• O acordo

✓Se um dos suspeitos confessar, mas seu companheiro não, este recebe uma sentença de um ano e seu companheiro uma sentença de quatro anos;

✓Se ambos confessarem, cada um receberá uma sentença de três anos;

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**

- O acordo

✓Se um dos suspeitos confessar, mas seu companheiro não, este recebe uma sentença de um ano e seu companheiro uma sentença de quatro anos;

✓Se ambos confessarem, cada um receberá uma sentença de três anos;

✓Se nenhum dos dois confessar, ambos serão julgados por um crime menor e receberão sentença de dois anos;

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**
- O acordo

✓Se um dos suspeitos confessar, mas seu companheiro não, este recebe uma sentença de um ano e seu companheiro uma sentença de quatro anos;

✓Se ambos confessarem, cada um receberá uma sentença de três anos;

✓Se nenhum dos dois confessar, ambos serão julgados por um crime menor e receberão sentença de dois anos;

✓Payoff: A utilidade é medida em anos de liberdade:

✓U = Pena máxima (4) – Sentença

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**
- Figura 8.1

		Suspect 2	
		Fink	Silent
Suspect 1	Fink	$u_1 = 1, u_2 = 1$	$u_1 = 3, u_2 = 0$
	Silent	$u_1 = 0, u_2 = 3$	$u_1 = 2, u_2 = 2$

Teoria dos Jogos

- **Equilíbrio de Nash e ótimo de Pareto**

- Equilíbrio de Nash é a situação na qual cada jogador escolhe uma estratégia que produz o maior *payoff* (*best response*), dadas as estratégias escolhidas pelos outros jogadores, ou seja, o jogador faz o melhor que pode em função daquilo que o seu oponente está fazendo e vice-versa;

- Ótimo de Pareto é o conjunto de estratégias que maximizam a soma dos *payoffs* individuais.

Teoria dos Jogos

- **Equilíbrio de Nash**
- **Best response**

✓ s_i é a melhor resposta do jogador $_i$ à estratégia s_{-i} do rival

✓ $u_i(s_i,s_{-i}) \geq u_i(s'_i,s_{-i})$ for all $s'_i \in S_i$

- Equilíbrio de Nash para jogos com *n* jogadores

✓ $(s^*_1,s^*_2,\ldots s^*_n)$

✓ Melhor resposta

✓ $s^*_i \in BR_i(s^*_{-i})$

Teoria dos Jogos

- **Dilema do Prisioneiro**
- Figura 8.1

		Suspect 2	
		Fink	Silent
Suspect 1	Fink	$u_1 = 1, u_2 = 1$	$u_1 = 3, u_2 = 0$
	Silent	$u_1 = 0, u_2 = 3$	$u_1 = 2, u_2 = 2$

Teoria dos Jogos

- **Equilíbrio de Nash e o dilema do prisioneiro**

		Suspect 2	
		Fink	Silent
Suspect 1	Fink	$\underline{u_1 = 1}$, $\underline{u_2 = 1}$	$\underline{u_1 = 3}$, $u_2 = 0$
	Silent	$u_1 = 0$, $\underline{u_2 = 3}$	$u_1 = 2$, $u_2 = 2$

Teoria dos Jogos

- **Equilíbrio de Nash**

- O jogo do 2-jogador (s^*_1, s^*_2) é um equilíbrio de Nash se:

$$u_1(s^*_1, s^*_2) \geq u_1(s_1, s^*_2) \text{ for all } s_1 \in S_1$$

$$u_2(s^*_2, s^*_1) \geq u_2(s_2, s^*_1) \text{ for all } s_2 \in S_2$$

- Desvantagens para o equilíbrio de Nash

✓Pode haver múltiplos equilíbrios;

✓Não está claro como um jogador pode escolher uma estratégia de melhor resposta antes de saber como os rivais jogarão.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINADAS E DOMINANTES**

✓Estratégia dominante é a melhor opção para um jogador, sem que ele se preocupe com a estratégia que o outro jogador irá escolher;

✓Estratégia dominada por sua vez é a estratégia que gera menor *payoff* independente da escolha do outro jogador.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINADAS E DOMINANTES**
- **Fonte: Pyndick, cap 13**

TABELA 13.4 Estratégia maximin

		Empresa 2	
		Não investe	Investe
Empresa 1	Não investe	0, 0	–10, 10
	Investe	–100, 0	20, 10

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINANTES**

- A Batalha dos sexos

✓ Marido e esposa querem combinar um encontro para sábado à noite;

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINANTES**

- A Batalha dos sexos

✓ Marido e esposa querem combinar um encontro para sábado à noite;

✓ A esposa prefere ir ao Ballet (u=2);

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINANTES**

- A Batalha dos sexos

✓Marido e esposa querem combinar um encontro para sábado à noite;
✓A esposa prefere ir ao Ballet (u=2);
✓O marido preferi ir assistir à luta (u=2);

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINANTES**

- A Batalha dos sexos

✓Marido e esposa querem combinar um encontro para sábado à noite;
✓A esposa prefere ir ao Ballet (u=2);
✓O marido preferi ir assistir à luta (u=2);
✓Ir a eventos separados não gera satisfação (u=0), e a utilidade de ir com o companheiro ao evento que não é de sua preferência gera o nível de utilidade u=1.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS DOMINANTES**
- A Batalha dos sexos

Player 1 (Wife)	Player 2 (Husband)	Ballet	Boxing
	Ballet	2, 1	0, 0
	Boxing	0, 0	1, 2

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS PURAS E MISTAS**

✓Estratégias Puras: As estratégias como vistas até então. O jogador levará em consideração os *payoffs* para a escolha de suas estratégias.

✓Estratégias Mistas: No caso das estratégias mistas, são atribuídas probabilidades às estratégias do jogador. Ou seja, os jogadores podem escolher aleatoriamente entre ações possíveis. Exemplo: pênalti.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

- Razões para estudar estratégias mistas

✓Alguns jogos não têm equilíbrio de Nash nas estratégias puras, mas terão um em estratégias mistas;

✓Estratégias envolvendo randomização são familiares e naturais em certos contextos.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

- Considere que o jogador *i* tenha *M* possíveis ações:

✓ $A_i = \{a^1{}_i, \ldots a^m{}_i, \ldots, a^M{}_i\}$

  - A distribuição de probabilidade da estratégia mista entre as *M* ações, é dada por:

$$s_i = (\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{mi}, \ldots, \sigma_{Mi})$$

  - σ_{mi} indica a probabilidade do jogador *i* escolher a ação (estratégia) a_{mi}

$$0 \leq \sigma_{mi} \leq 1$$

$$\sigma_{1i} + \ldots + \sigma_{mi} + \ldots + \sigma_{Mi} = 1$$

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**
- Batalha dos sexos

✓Ações dos jogadores: {ballet, luta}

✓Probabilidade de escolher ballet = σ e de escolher luta = $1-\sigma$

✓As estratégias com probabilidades (1/3, 2/3) e (½, ½) são consideradas estratégias mistas; e as estratégias (1,0) e (0,1) são consideradas estratégias puras.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff esperado da esposa:

✓U1(ballet, luta) – U1(1/9,8/9)

✓U2 (ballet, luta) – U2 (4/5, 1/5)

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff esperado da esposa:

✓U1(ballet, luta) – U1(1/9,8/9)

✓U2 (ballet, luta) – U2 (4/5, 1/5)

✓(1/9)(4/5) U1 (ballet , ballet) + (8/9)(4/5) U1 (luta,ballet) + (1/9)(1/5) U1 (ballet,luta)+ (8/9)(1/5) U1 (luta,luta)

✓(1/9)(4/5)*2 + (8/9)(4/5)*0 + (1/9)(1/5)*0 + (8/9)(1/5)*1 = 16/45

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff esperado da esposa:

✓U1(ballet, luta) – U1(w,(1-w))

✓U2 (ballet, luta) – U2 (h, (1-h))

✓(w)(h) U1 (ballet , ballet) + (1-w)(h) U1(luta,ballet) + (w)(1-h) U1 (ballet,luta)+ (1-w)(1-h) U1(luta,luta)

✓(w)(h)*2 + (1-w)(h)*0 + (w)(1-h)*0+ (1-w)(1-h)*1

✓

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff esperado da esposa:

✓U1(ballet, luta) – U1(w,(1-w))

✓U2 (ballet, luta) – U2 (h, (1-h))

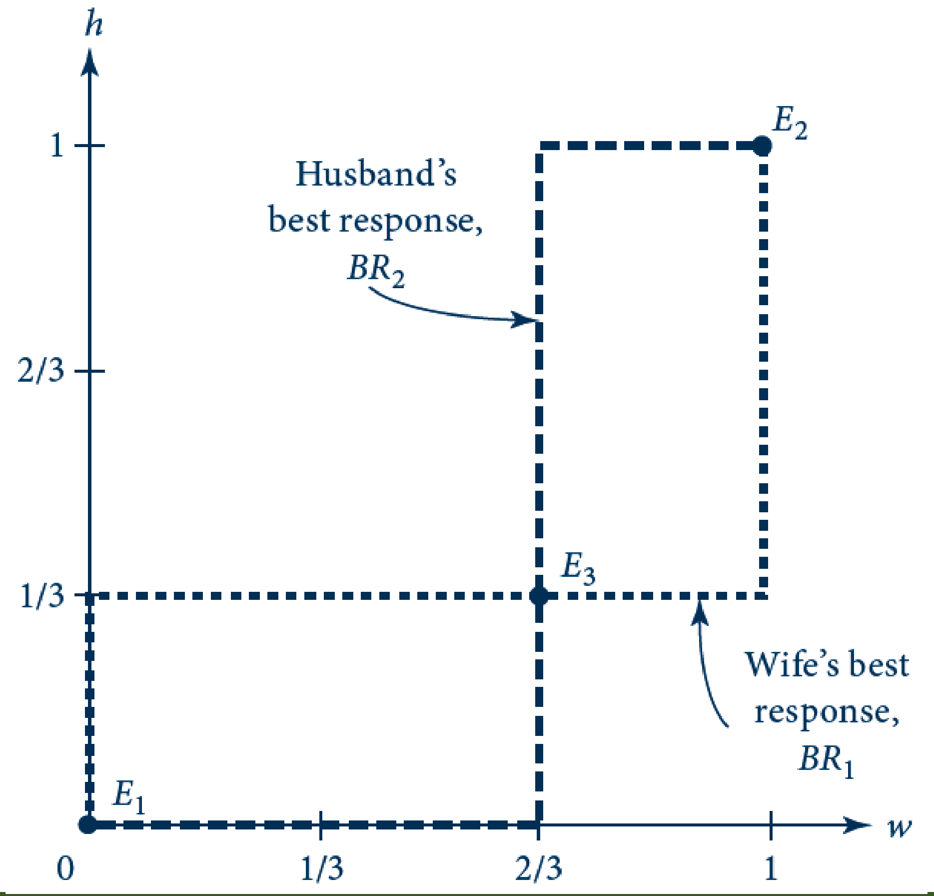
✓(w)(h) U1 (ballet , ballet) + (1-w)(h) U1(luta,ballet) + (w)(1-h) U1 (ballet,luta)+ (1-w)(1-h) U1(luta,luta)

✓(w)(h)*2 + (1-w)(h)*0 + (w)(1-h)*0+ (1-w)(1-h)*1

✓ = 1-h-w+3hw

Teoria dos Jogos

- Equilíbrio de Nash em Estratégias mistas na Batalha dos sexos



- O ballet é escolhido pela esposa com probabilidade *w* e pelo marido com probabilidade *h*. As melhores respostas dos jogadores são representadas graficamente no mesmo conjunto de eixos. Os três pontos de interseção E1, E2 e E3 são o equilíbrio de Nash. O equilíbrio de Nash em estratégias estritamente mistas, E3, é w * = 2/3 e h * = 1/3.

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff estratégias mistas para marido:

✓U2(ballet, (h, (1-h)) = U2(ballet, h) + U2(ballet, (1-h)) = 2h + 0*(1-h) = 2h

✓U2(luta, (h, (1-h)) = U2(luta, h) + U2(luta, (1-h)) = 0*h + 1*(1-h) = (1-h)

Teoria dos Jogos

- **ESTRATÉGIAS MISTAS**

✓Exemplo 8.3 - Batalha dos sexos

✓Calcular Payoff estratégias mistas para marido:

✓U2(ballet, (h, (1-h)) = U2(ballet, h) + U2(ballet, (1-h)) = 2h + 0*(1-h) = 2h

✓U2(luta, (h, (1-h)) = U2(luta, h) + U2(luta, (1-h)) = 0*h + 1*(1-h) = (1-h)

✓2h =1- h ⇨ 3h = 1 ou h*=1/3

Referências Bibliográficas

- RUBINFELD, D.L.; PINDYCK, R. S. Microeconomia. 8ª ed., 2013 – cap. 13
- NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 8
- FIANI, R. **Teoria dos Jogos**. 3ª Edição, 2009.