# Prova 1: SFI5876 - Teorias de Gauge Não Abelianas e Sólitons

Data de Início: 11 de Outubro de 2021

Data de Entrega: 18 de Outubro de 2021

1. **(1,0)** Utilizando o princípio de gauge ou acoplamento minimal, resolva a equação de Schrödinger (não relativística) para uma partícula carregada sem spin na presença de um campo magnético constante na direção $z$, i.e $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$. O potencial vetor $\vec{A}$ que fornece o campo magnético através de $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, não é único. Como se relacionam as funções de onda para as várias escolhas de $\vec{A}$? O que ocorre aos valores das energias dos estados quando mudamos $\vec{A}$?

2. **(1,0)** Considere uma teoria de Yang-Mills pura, sem campos de matéria, para o grupo de gauge $G = SU(2)$, e considere a seguinte configuração para os campos de gauge

$$A_1^a = A_2^a = 0; \qquad\qquad A_0^a = -A_3^a = x_1\,f_a\,(x_0 - x_3) + x_2\,g\,(x_0 - x_3)$$

onde, $f_a$ e $g_a$ são funções arbitrárias de $x_0 - x_3$, $A_\mu = A_\mu^a\,T_a$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $a = 1, 2, 3$, e $[\,T_a\,,\,T_b\,] = i\,\varepsilon_{abc}\,T_c$.

   (a) Calcule o tensor dos campos $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,]$, para esta configuração de campos.

   (b) Verifique se esta configuração de campos satisfaz as equações de Yang-Mills da teoria (Euler-Lagrange e identidade de Bianchi).

   (c) Calcule a energia desta configuração de campos.

   (d) Considere uma outra configuração propagando-se em outra direção

$$\widetilde{A}_1^a = \widetilde{A}_3^a = 0; \qquad\qquad \widetilde{A}_0^a = -\widetilde{A}_2^a = x_1\,f_a\,(x_0 - x_2) + x_3\,g\,(x_0 - x_2)$$

   A superposição $A_\mu^a + \widetilde{A}_\mu^a$, é solução?

3. **(1,0)** A Lagrangiana de Yang-Mills sem campos de matéria é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(F^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}) \qquad\qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,] \qquad A_\mu = A_\mu^a\,T_a$$

onde $T_a$, $a = 1, 2, \ldots \dim G$, são os geradores da álgebra de Lie do grupo de gauge $G$. As equações de Euler-Lagrange correspondentes são

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,F^{\mu\nu}\,] = 0$$

As tranformações conformes infinitesimais são dadas por

$$\delta x^\mu = \varepsilon\,\zeta^\mu \qquad\qquad \delta A_\mu = -\varepsilon\,\partial_\mu \zeta^\rho\,A_\rho$$

onde $\varepsilon$ é um parâmetro infinitesimal, e onde as funções $\zeta^\mu$ satisfazem a relação

$$\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu = 2\, \omega\, g_{\mu\nu}$$

onde $g_{\mu\nu} = \text{diag.}\,(1\,,\, -1\,,\, -1\,,\, -1)$, é a métrica de Minkowski, $\zeta_\mu = g_{\mu\nu}\, \zeta^\nu$, e onde $\omega = 0$ para as transformações do grupo de Poincaré, $\omega =$ constante para dilatações, e $\omega$ é linear na coordenadas $x^\mu$ para as tranformações conformes especiais. Mostre que a ação (integral da densidade de Lagrangiana) de Yang-Mills e as equações de Euler-Lagrange correspondentes são invariantes por transformações conformes se a dimensão do espaço-tempo é 4.

4. **(1,0)** Para uma teoria de gauge com grupo de gauge $G$ e campos de Higgs na representação adjunta temos que a equação de auto-dualidade BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield) é dada por

$$B_i = \pm D_i \phi; \qquad B_i = B_i^a\, T_a; \qquad \phi = \phi^a\, T_a; \qquad D_i = \partial_i * + i\, e\, [\, A_i\,,\, *\,]$$

Como o número de campos de gauge é a dimensão do grupo de gauge $G$, podemos introduzir uma quinta coordenada fictícia $x_4$ e denotar $\phi$ como a componente do campo de gauge naquela direção, i.e.

$$A_4 \equiv \phi$$

Mostre que a equação de auto-dualidade BPS pode ser escrita como a equação de auto-dualidade para o tensor dos campos nas quatro dimensões espaciais, i.e.

$$F_{mn} = \pm \widetilde{F}_{mn}; \qquad \widetilde{F}_{mn} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{mnkl}\, F^{kl}; \qquad m, n, k, l = 1, 2, 3, 4$$

Assuma que nada depende da coordenada $x_4$.

5. **(2,0)** Considere a teoria de gauge com grupo $U(1)$ com densidade Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, \mid \partial_\mu \phi + i\, e\, A_\mu\, \phi \mid^2 - V$$

com

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \qquad V = -c_2\, \mid \phi \mid^2 + c_4\, \mid \phi \mid^4$$

Portanto o vácuo de Higgs é um círculo

$$\phi_{\text{vac.}} = \sqrt{\frac{c_2}{2\, c_4}}\, e^{i\,\alpha}; \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\,\pi$$

Procuramos soluções que não dependam de $x_3$, e portanto a energia será infinita. No entanto, a energia por unidade de comprimento, na direção $x_3$, será finita. Para tal densidade de energia ser finita é necessário que o Higgs vá para o vácuo no infinito $\rho \to \infty$, $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Teremos portanto uma carga topológica que é o mapeamento de um círculo $S^2_\infty$, no infinito do plano $x_1\, x_2$, no círculo do vácuo do Higgs. Utilizamos o ansatz

$$\phi = f\,(\rho)\; e^{-i\,n\,\varphi}; \qquad \vec{A} = -\frac{a\,(\rho)}{\rho}\, \hat{e}_\varphi; \qquad n \in \mathbb{Z}$$

com as condições de contorno

$$f\,(0) = a\,(0) = 0; \qquad f\,(\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{c_2}{2\,c_4}}; \qquad a\,(\rho) \rightarrow -\frac{n}{e}; \qquad \rho \rightarrow \infty$$

(a) Calcule, a partir das equações de Euler-Lagrange da teoria, as equações para as funções $f$ e $a$ do ansatz.

(b) Impondo que as componentes $T_{\rho\rho}$ e $T_{\varphi\varphi}$, do tensor energia-momento, sejam nulas, e para o caso particular onde $e^2 = 8\,c_4$, encontre equações diferenciais de primeira ordem para $f$ e $a$ que impliquem as equações de segunda ordem obtidas acima.

(c) Calcule a densidade de energia estática (componente $T_{00}$ do tensor energia-momento) em termos das funções do ansatz.

(d) Calcule a massa (energia estática) das soluções do ansatz.

6. **(1,0)** Considere uma teoria de campos escalares com um grupo de simetria global $G$ espontaneamente quebrado para um subgrupo $H$.
Responda:

   (a) O que são os bosons de Goldstone?

   (b) Qual o número de bosons de Goldstone existentes na teoria após a quebra espontânea de simetria?

   (c) Diga qual dos ingredientes abaixo são incompatéveis com o aparecimento dos bosons de Goldstone, e justifique

      i. simetria contínua
      ii. número infinito de graus de liberdade
      iii. vácuo não degenerado

7. **(1,0)** Considere uma teoria de gauge com grupo $G$ onde a simetria é espontaneamente quebrada por campos de Higgs para um subgrupo $H$.
Responda:

   (a) Quantos bosons de gauge adquirem massa?

   (b) O que ocorre com os bosons de Goldstone?

   (c) Como a massa dos bosons de gauge dependem da constante de acoplamento de gauge e do valor esperado no vácuo do campo de Higgs?

8. **(2,0)** Considere uma teoria com 3 campos escalares reais $\phi_a$ transformado pela representação adjunta (tripleto) do grupo $SO(3)$ e densidade de Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_a\,\partial^\mu\phi_a - V; \qquad \text{com} \qquad V = \frac{\lambda}{4}\,\left(\phi_a\,\phi_a - v^2\right)^2$$

Suponha que o sistema vá para a configuração

$$\phi_{\rm vac} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Responda:

(a) Há quebra espontânea de simetria? Se sim, qual o grupo de simetria exata?

(b) Expanda o sistema em torno do vácuo $\phi_{\rm vac}$, e identifique os bósons de Goldstone. Qual a massa deles?

(c) Qual a massa dos campos que não são bósons de Goldstone?

9. **(1,0)** Considere uma teoria de gauge com grupo $SU(3)$ e campo de Higgs na representação adjunta (octeto), i.e. $\phi \equiv \sum_{a=1}^{8} \phi_a T_a$. A álgebra de $SU(3)$ é dada por matrizes complexas $3 \times 3$, hermitianas e com traço nulo. Estas matrizes constituem na verdade a representação tripleto de $SU(3)$.

   (a) Qual é o grupo de gauge após a quebra espontânea de simetria quando o campo de Higgs no vácuo toma o valor

$$\phi_0 = \frac{v_0}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (b) Determine a matriz das massas dos bosons de gauge para este padrão de quebra de simetria.

   (c) Suponha que o subgrupo $U(1)$ gerado por

$$Q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   possa ser interpretado como o $U(1)$ eletromagnético. Considere agora 3 campos spinoriais $\psi_i$, $i = 1, 2, 3$ transformando pela representação tripleto de $SU(3)$. Sabe-se que $\psi_1$ não é carregado e $\psi_2$ e $\psi_3$ possuem cargas elétricas 1 e $-1$ respectivamente. Como devem ser arranjados estes campos no tripleto para que o acoplamento de gauge seja compatível com o fato de $Q$, dado acima, ser o gerador do $U(1)$ eletromagnético.

10. **(1,0)** O grupo $SU(5)$ é o grupo de Lie das matrizes complexas $5 \times 5$, unitárias e de determinante igual a 1. Sua álgebra é a das matrizes complexas $5 \times 5$, hermitianas de traço nulo. A dimensão de $SU(5)$ é portanto 24. Considere uma teoria de gauge cujo grupo de gauge é $SU(5)$, e com campos de Higgs na representação adjunta, $\phi \equiv \sum_{a=1}^{24} \phi_a T_a$, com $T_a$, $a = 1, 2, \ldots 24$, sendo uma base da álgebra de Lie de $SU(5)$. Apesar do campo de Higgs estar na representação adjunta podemos expressa-lo como matrizes $5 \times 5$, tomando os geradores $T_a$ na representação (fundamental) 5 de $SU(5)$. A densidade Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2} \left(D_\mu \phi\right)^T D^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi_a \phi_a - v^2\right)^2$$

(a) Qual a estrutura da variedade do vácuo de Higgs?

(b) O campo de gauge atua transitivamente neste vácuo?

(c) Determine, em cada um dos casos abaixo, os subgrupos da simetria de gauge exata, após a quebra espontânea de simetria, quando o campo de Higgs assume os seguintes valores no vácuo

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= v_0 \sqrt{\frac{2}{15}} \,\mathrm{diag.}\,(1\,,\,1\,,\,1\,,\,-3/2\,,\,-3/2) \\ \phi_0^{(2)} &= \frac{v_0}{\sqrt{20}} \,\mathrm{diag.}\,(1\,,\,1\,,\,1\,,\,1\,,\,-4) \end{aligned}$$

(d) Quantas bosons de gauge adquirem massa em cada um dos casos?

(e) Quantos campos de Higgs restam após a quebra espontânea de simetria, em cada um dos casos?

(f) Calcule as matrizes de massa em cada um dos casos acima.