Uma tecnologia é descrita pela função de produção $y = x_1^{0,2}x_2^{0,3}$. Encontre as funções custo total, custo médio e custo marginal correspondentes a essa função de produção, considerando que os preços dos insumos 1 e 2 são, respectivamente, $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$.

Na solução de qualquer um dos problemas de otimização (max y, sujeito a $\bar{c}$ ou minimizar c, sujeito a $\bar{y}$), vale a condição de que os produtos marginais dos insumos são proporcionais a seus preços*

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \frac{0,2\, x_1^{-0,8}\, x_2^{0,3}}{0,3\, x_1^{-0,2}\, x_2^{-0,7}} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{x_2 = \frac{3}{4} x_1}$$

substituindo na função de produção:

$$x_1^{0,2}\left(\frac{3}{4}x_1\right)^{0,3} = y \qquad x_1^{0,5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{0,3} y \qquad x_1^* = \left(\frac{4}{3}\right)^{0,6} y^2 = 1,1884\, y^2$$

$$x_2^* = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{0,6} y^2 = 0,8913\, y^2$$

Custo: $C(y) = w_1 x_1^*(y) + w_2 x_2^*(y)$

$$C(y) = 1 \cdot 1,1884\, y^2 + 2 \cdot 0,8913\, y^2 = 2,971\, y^2$$

$$\text{Custo Médio} = \frac{C(y)}{y} = \frac{2,971\, y^2}{y} = 2,971\, y$$

$$\text{Custo Marginal} = \frac{dC(y)}{dy} = 5,942\, y$$

* Essa condição decorre das condições de primeira ordem da otimização do Lagrangeano associado ao problema: $\partial L/\partial x_1 = 0$; $\partial L/\partial x_2 = 0$; e $\partial L/\partial \lambda = 0$