Funções de Bessel

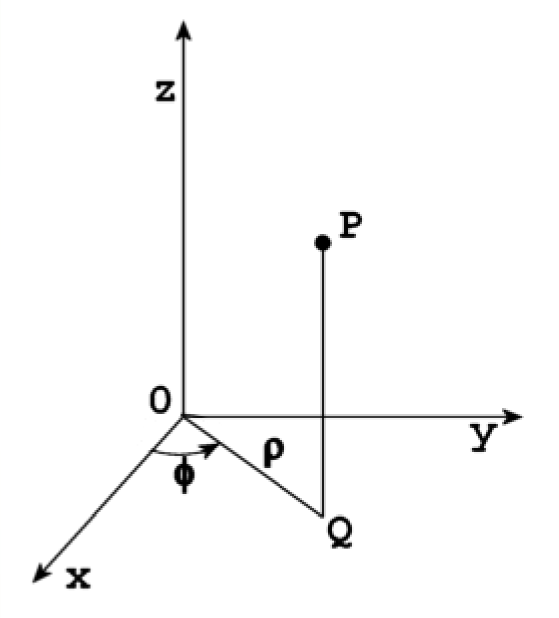
Coordenadas Cilíndricas : ψ (ρ, φ, z)

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0;$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2 z.$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi$$



$$\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho\frac{dP}{d\rho} + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

Equação de Bessel

Simplificando...

$$\rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

$$n\rho = x \qquad e \qquad y(x) = P\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$Para\ n\ real$$

$$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0}$$

Equação de **Bessel** de ordem m

$$Para\ n = in$$

$$\boxed{x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0}$$

Equação de **Bessel Modificada**

→ Método de Frobenius (série de potências)

Equação de Bessel de ordem m

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-m^2\right)y=0$$

PROCURAR AS DUAS SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES DESTA EQUAÇÃO

$y_1(x)$ e $y_2(x)$

$y(x) = Ay_1(x)+By_2(x)$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

Procurar soluções do tipo Séries de Potências:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{k+\alpha}$$

Equação indicial $(\alpha^2 - m^2) = 0$ $\quad \alpha = \pm m$

$\alpha^2 - \alpha + \alpha - m^2$

$$k = 0 \rightarrow \quad a_0[\alpha(\alpha - 1)] + \alpha - m^2] = 0$$

$$\boxed{a_0 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = m \text{ e } \alpha_2 = -m}$$

$$k = 1 \rightarrow \quad a_1[(\alpha + 1)^2 - m^2] = 0$$

$(\alpha+1)^2 = m^2$

$\alpha + 1 = \pm m$ $\quad \alpha_1 = m + 1$, $\quad \alpha_2 = -m + 1$

$a_1 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = 1+m$ e $\alpha_2 = 1-m$ $\quad \rightarrow$ **Escolhe-se $a_1=0$**

Relação de recorrência, $a_0 \neq 0$ e $\alpha = m$

$$a_k = -\frac{1}{(k+\alpha)^2 - m^2} a_{k-2}$$

$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m m!}{2^{2k} k!(k+m)!} a_0 \qquad a_0 = (2^m m!)^{-1}$$

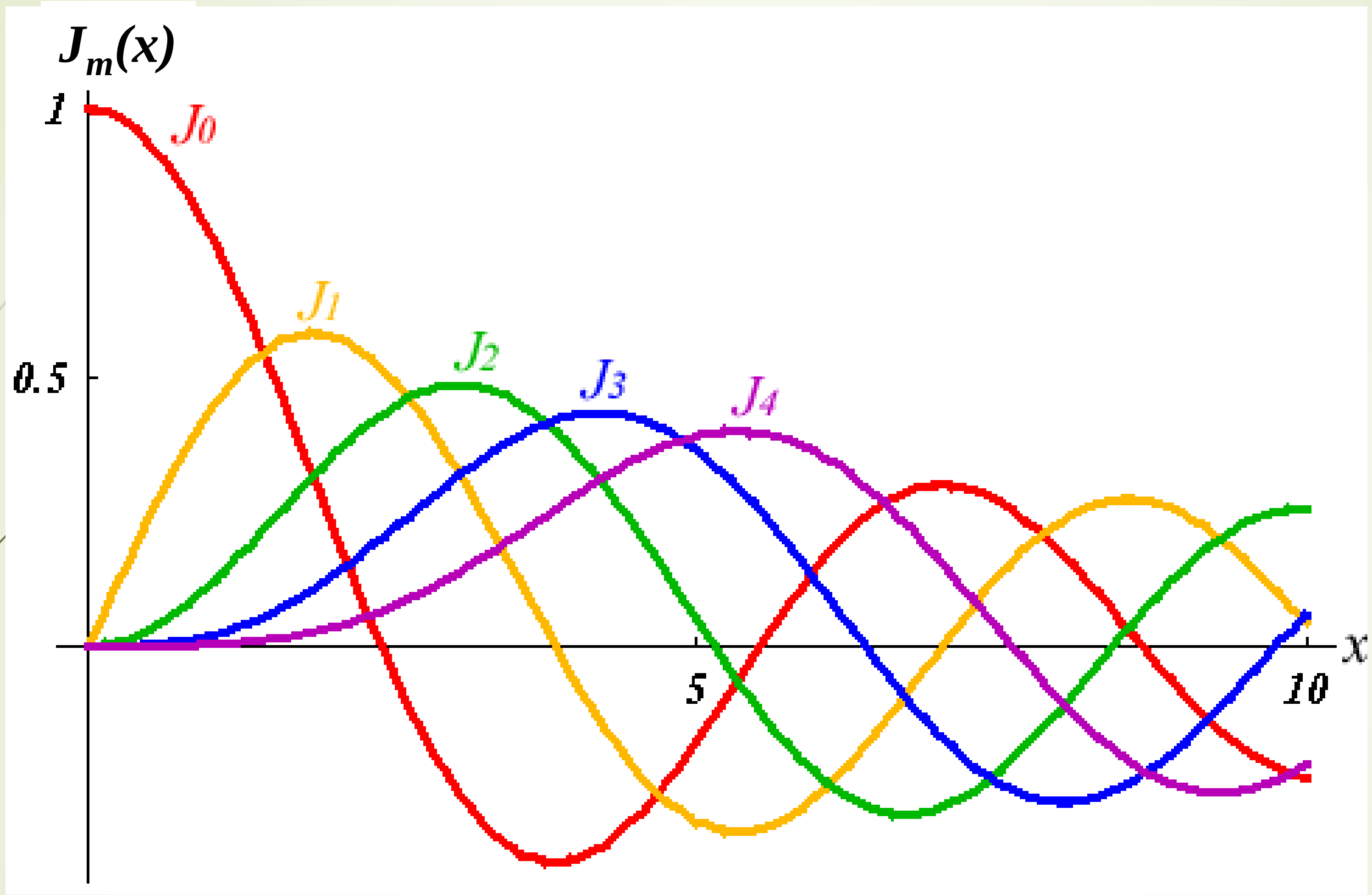
$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m}{2^{2k+m} k!(k+m)!}$$

Primeira solução para equação de Bessel (para m inteiro)

$$\boxed{y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}$$

J_m é a função de Bessel de 1ª. espécie e ordem m

Esta série converge para todo intervalo finito;
$J_m(x)$ está definida para todo valor de x real ou complexo



A função não tem problema de convergência para qualquer valor de x.

A outra solução para α = - m é:

$$y_2(x) = J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

Seriam as soluções $J_m(x)$ e $J_{-m}(x)$ soluções *linearmente independentes (LI)?*

Para obter as soluções LI deve-se calcular o wronskiano destas soluções:

Chamamos de funções *linearmente independentes*, duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que satisfazem

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \quad para\ todo\ x\ , se\ e\ somente\ se\ \ C_1 = C_2 = 0$$

em outras palavras, *não podemos escrever* $y_2(x) = Cy_1(x),\ C \neq 0.$

Se fosse possível escrever $y_2(x) = Cy_1(x),\ C \neq 0$ as 2 soluções seriam *linearmente dependentes* e teríamos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Cy_1(x) \\ y_2'(x) &= Cy_1'(x) \end{aligned} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

cuja solução é $\quad y_1(x)y_2'(x) = y_1'(x)y_2(x)$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (5)$$

da equação (5) vemos que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes então, $W(x) \neq 0$

$$W(J_m, J_{-m}) = -2\frac{sen(m\pi)}{\pi x}$$

- ✓ Se m = n é inteiro $\rightarrow$ $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ $\rightarrow$ *não são LI, pois W = 0. E:* $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

- ✓ Se m = ν não é inteiro $\rightarrow$ $J_\nu(x)$ e $J_{\nu}(x)$ *são LI.*

Segunda solução para equação de Bessel (para ν = m inteiro)

Como: $$W(J_m, J_{-m}) = -2\frac{sen(m\pi)}{\pi x} = 0$$

Precisamos procurar uma solução que seja LI de $J_m(x)$

⬇

Funções de Bessel de segunda espécie ou Funções de Neumann

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

$N_\nu(x)$ é solução da equação de Bessel para ν não inteiro, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$, que são soluções LI .

E para $\nu \to n$ (n inteiro) também é solução.

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

Notação:

$N_\nu(x) = Y_\nu(x)$

Pode ser mostrado que para qualquer valor de ν inteiro ou não, que:

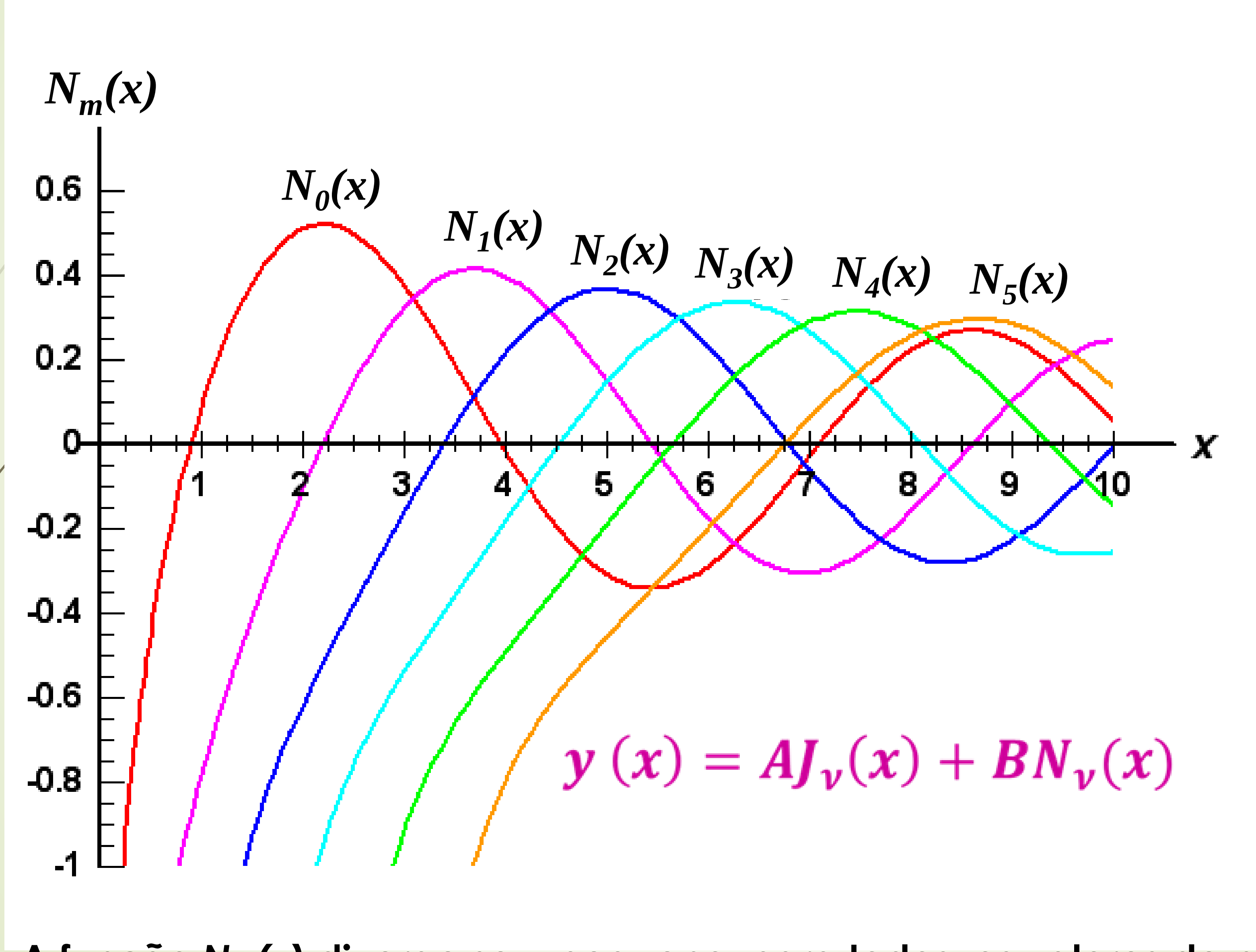
$$W(J_n, N_n) = \frac{2}{\pi x}$$

Assim, a solução mais geral da equação de Bessel será:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$ → Para qualquer valor de ν

Particularmente, para ν não inteiro:

- ✓ ***$J_\nu(x)$ e $J_\nu(x)$ são LI.*** → $y(x) = A\,J_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$



A função $N_m(x)$ diverge se x pequeno, para todos os valores de m.

Equação de Bessel Modificada
$x \rightarrow ix$

Equação de Bessel

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+m^2)y=0$$

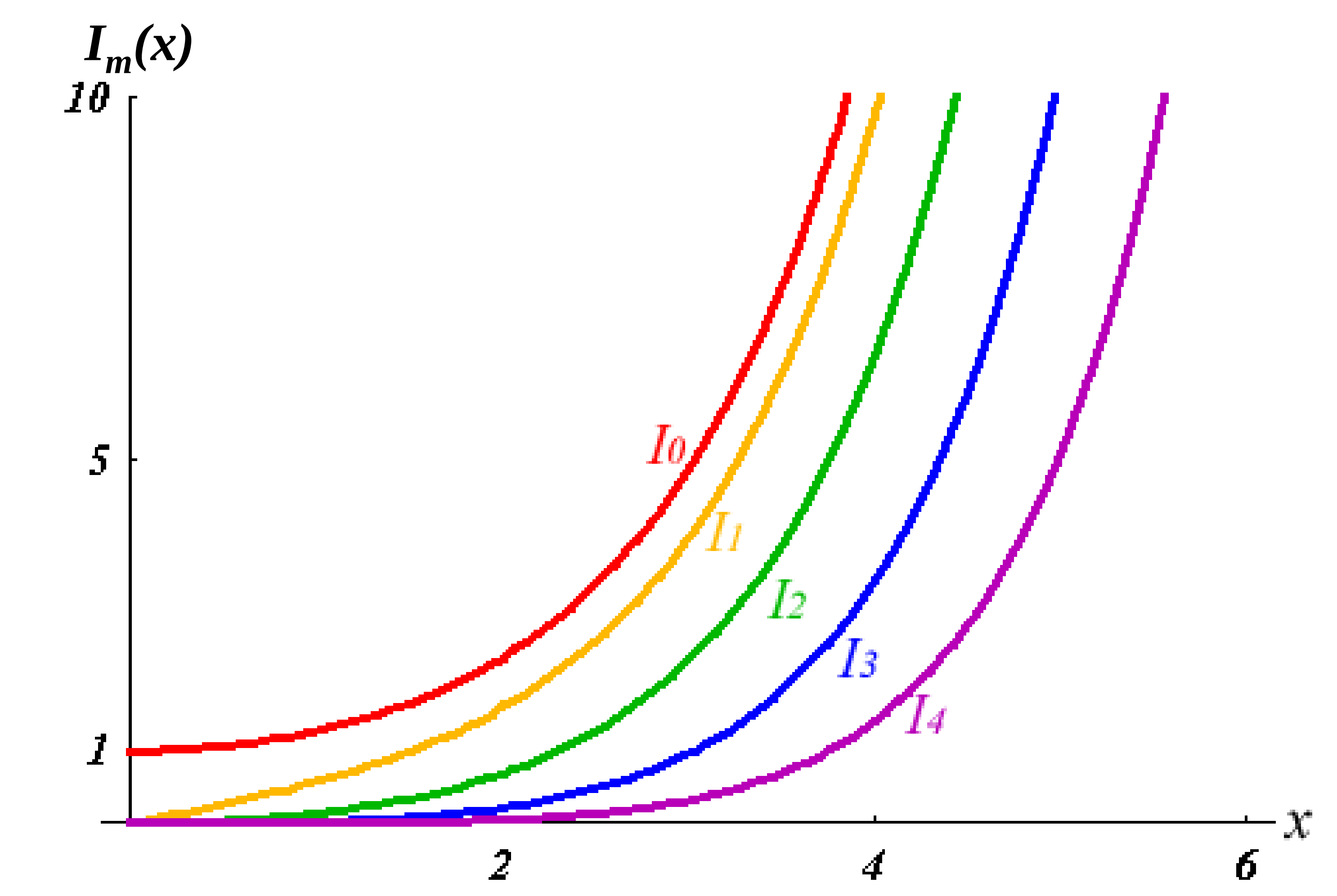
Primeira solução para equação de Bessel Modificada
(para m inteiro)

$$I_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Função de Bessel modificada de 1a. Espécie e ordem m

Existe uma relação entre $I_m(x)$ e $J_m(x)$ dada por:

$$I_n(x)=(-i)^n\,J_n(ix)$$



A função $I_m(x)$ diverge se x cresce, para todos valores de m.

Função Geratriz para n inteiro

Bessel :

$$G_{Bessel}(x,t) = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

Bessel Modificada:

$$G_{\,Bessel\,Mod} = exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\, t^n$$

Relações de recorrência para as funções de Bessel

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \qquad \left(\frac{dG}{dt}\right)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x) \qquad \left(\frac{dG}{dx}\right)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Relações de recorrência para as funções de **Bessel Modificadas**

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = 2I_\nu'(x)$$

$$I_\nu'(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x)$$

$$I_\nu'(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x)$$

Segunda solução para equação de Bessel Modificada
(para m = ν não - inteiro)

Funções de Bessel Modificada de segunda espécie

$$y_1\,(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{sen(\nu\pi)}$$

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu J_\nu(ix)$$

$\Downarrow$

K_ν (x) é solução da equação de Bessel para <u>ν não inteiro</u>, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$, que são soluções LI .

Resumo

Equação de Bessel de ordem m

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-m^2)y=0$$

1ª. espécie

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{sen(\nu\pi)}$$

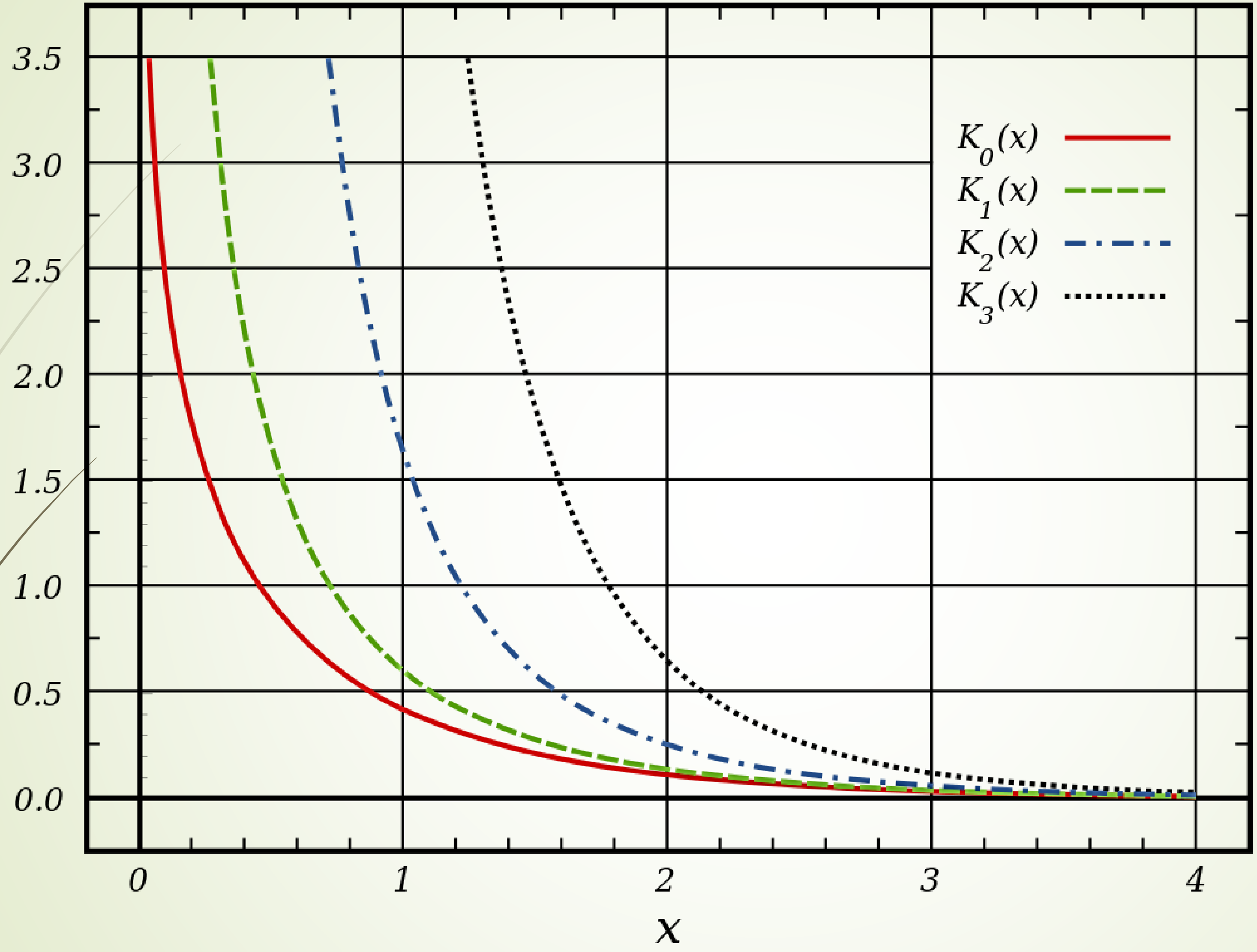
Solução Geral

$$y\,(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

→ Para qualquer valor de ν

$$y(x) = A\,J_\nu(x) + B\,J_{-\nu}(x)$$

→ Somente para ν não-inteiro



A função $K_m(x)$ diverge se x pequeno, para todos os valores de m.

Resumo

Equação de Bessel Modificada de ordem m

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+m^2)y=0$$

1ª. espécie

$$y_1(x)=I_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

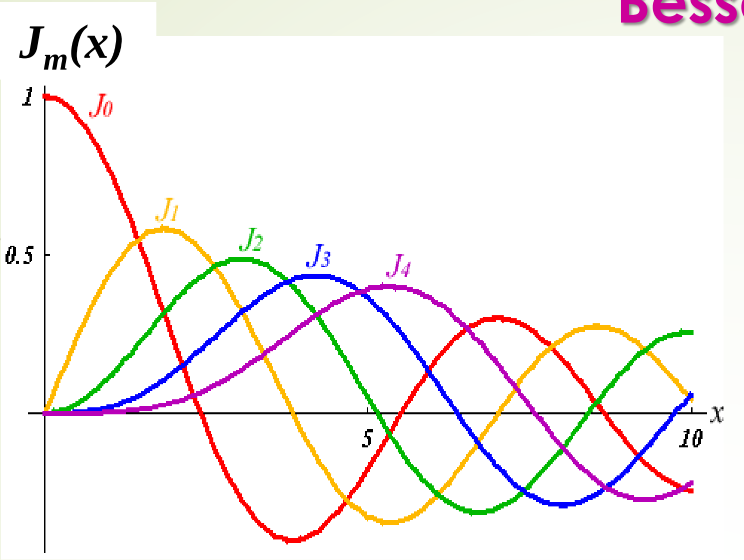
$$y_2\,(x)=K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{sen(\nu\pi)}$$

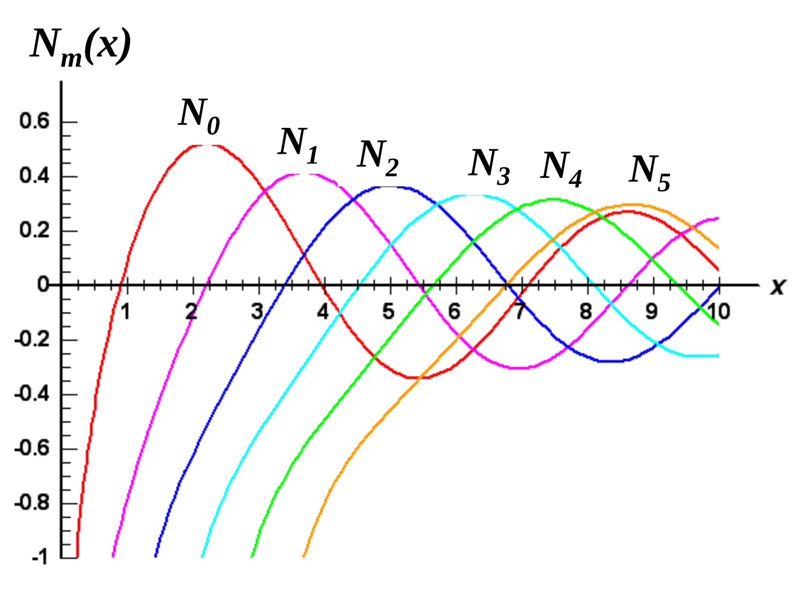
Solução Geral

$$y\,(x)=CI_\nu(x)+DK_\nu(x)$$ → Para qualquer valor de ν

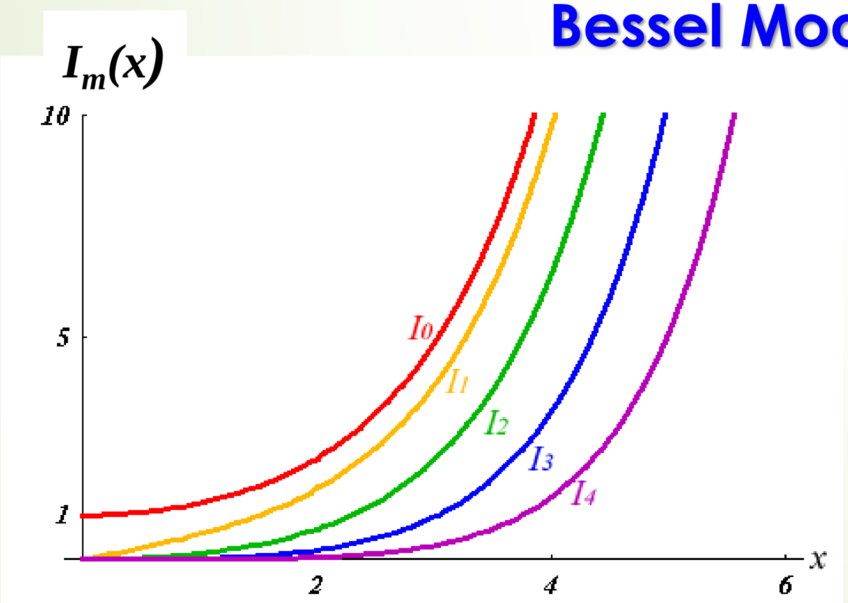
$$y(x) = A\, I_\nu(x) + B\, I_{-\nu}(x)$$ → Somente para ν não-inteiro

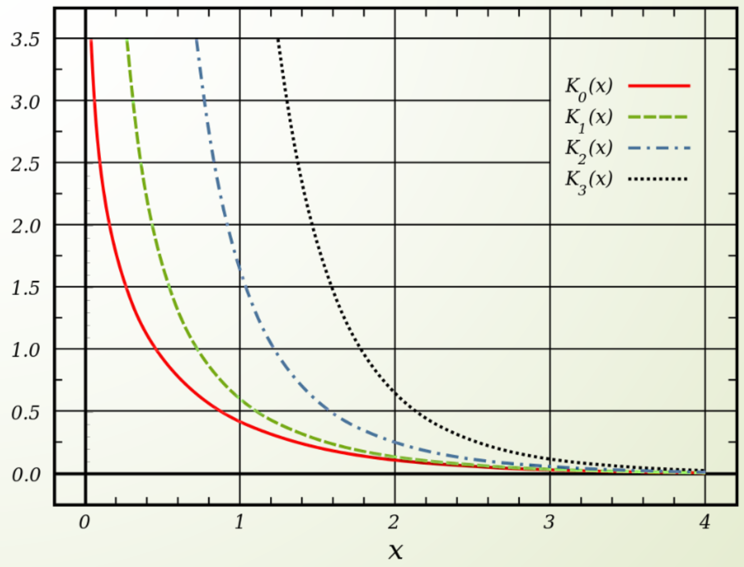
Bessel





Bessel Modificada





- Mostre que a solução da equação (1) é dada pela equação (2).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3}xy = 0 \qquad (1)$$

$$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0}$$

$$y(x) = x^{1/2}\left\{AJ_{\frac{1}{3}}(t) + BJ_{-\frac{1}{3}}(t)\right\} \qquad (1)$$

- Com $t^2 = 4x^3/27$ e A e B são constantes arbitrárias.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-m^2)y=0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+m^2)y=0$$

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-n^2)y=0$$

$t = Kx$

$$y''+\frac{y'}{x}+\left(8-\frac{1}{x^2}\right)y=0$$

Multiplica por x^2
e chama $8x^2 = t^2$

$$x^2y''-xy'+4x^2y=0$$

$$y(x) = x^{\frac{m}{n}}\,u(x)$$

Determina m/n por comparação com a equação de Bessel

Soluções

$$x^2y'' + xy' + (K^2x^2 - n^2)y = 0$$

$y(x) = AJ_n(Kx) + BJ_{-n}(Kx)$ para n não inteiro

$y(x) = AJ_n(Kx) + BN_n(Kx)$ para qq. n

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(8 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

$$y(x) = AJ_1\left(2\sqrt{2}x\right) + BN_1\left(2\sqrt{2}x\right)$$

$$x^2y'' - xy' + 4x^2y = 0$$

$$y(x) = x\{AJ_1(2x) + BN_1(2x)\}$$