

TRANSFORMADAS INTEGRAIS

FOURIER

Transformada integral

Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt$$

$$f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha, t)d\alpha$$

A função $F(\alpha)$ é denominada de transformada integral de $f(t)$ pelo núcleo $K(\alpha, t)$, e *vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função $f(t)$ no espaço t para uma outra função, $F(\alpha)$, no espaço α .

Transformadas integrais são ferramentas úteis para se resolver equações diferenciais de problemas com valor inicial.

A TF também é usada para decomposição de sinais.

Transformada de Fourier (TF)

TF

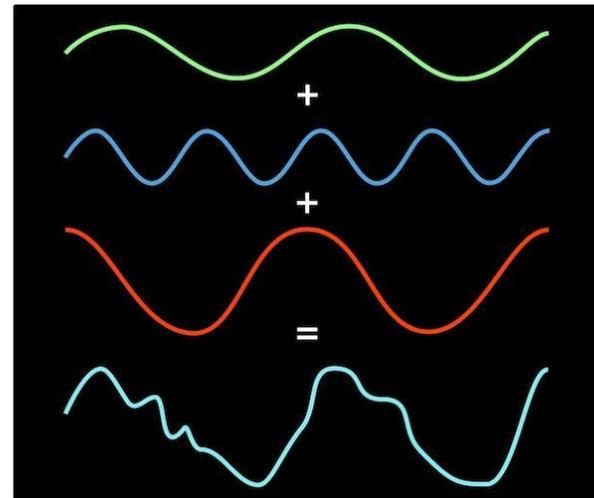
Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;

Funções oscilantes não-periódicas podem ser representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);

A TF decompõe um sinal em suas
componentes elementares
seno e cosseno

TF

A TF decompõe um sinal (elétrico) em suas
componentes elementares
seno e cosseno



Aplicações da Transformada de Fourier

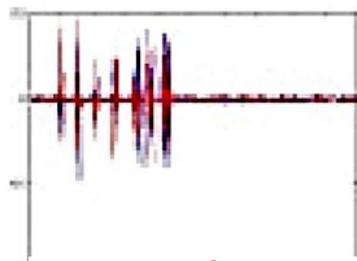
- Física
- Química
- Teoria dos números
- Análise combinatória
- **Processamento de sinais**
- Teoria das probabilidades
- Estatística
- Criptografia
- e outras áreas.

Sinal

Fenómeno variável no tempo e/ou espaço.

Descrito quantitativamente.

“Os sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes e, tipicamente contêm informação acerca do comportamento ou natureza de um fenômeno físico.”



Joseana Macêdo Fechine
Grupo PET Computação

Exemplos:

$F(t)$ -> Som $F(\omega)$

$F(x,y)$ -> Imagem

$F(x,y,t)$ -> Vídeo



Sinais ... Ondas...

- ❑ **Distribuição de elétrons em átomos pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados.**
- ❑ **Na Mecânica Quântica, a origem Física das relações de Fourier é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos em termos de ondas (k, ω) .**

Obtenção da Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt$$

Substituindo-se a_n e b_n em (1):

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt +$$
$$+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \times \cos \frac{n\pi x}{L} + \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \times \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) \times \cos \frac{n\pi t}{L} \times \cos \frac{n\pi x}{L} dt + \int_{-L}^L f(t) \times \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \times \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dt \right\}$$

Colocando-se $f(t)$ em evidência se obtém o termo:

$$\cos \frac{n\pi t}{L} \times \cos \frac{n\pi x}{L} + \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \times \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \cos \left(\frac{n\pi}{L} (t - x) \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{L} (t - x) \right) dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right) dt$$

$$\frac{n\pi}{L} = \omega$$

$$\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$$

Fazendo:

$$L \rightarrow \infty$$

$$[-L, L] \rightarrow (-\infty, \infty)$$

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} (\Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \cos(\omega(t-x)) dt)$$

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \rightarrow \int_0^{\infty} d\omega$$

Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \cos(\omega(t-x)) dt$$

Integral de Fourier – Forma exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \cos(\omega (t - x)) dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Em muitos problemas físicos ω corresponde à frequência angular. A integral de Fourier é uma representação de $f(x$ ou $t)$ em termos de uma distribuição de trens de ondas infinitamente longos (k e ω).

Transformada de Fourier

Integral de Fourier \rightarrow $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$

Reescrevendo: $F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \rightarrow$$

Transformada de Fourier

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad \text{com} \quad F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Trocar x por t , não faz diferença, pois a variável de integração é ω .

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Transformada de Fourier

Forma exponencial

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

$$F(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

$F(\omega)$ é a Transformada de Fourier de $f(t)$ e vice-versa

$F(k)$ é a Transformada de Fourier de $f(x)$ e vice-versa

Em três dimensões

$$F(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int f(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\mathbf{r}$$

$$f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int F(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\omega$$

ω e t substituídos pelas variáveis tridimensionais k e r , que em uma dimensão poderiam ser k e x .

Transformadas: Cosseno e Seno

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \operatorname{sen} \omega t$$

$$f(-t) = f(t)$$

PAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$$f(-t) = -f(t)$$

IMPAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega$$

Transformadas de Fourier de algumas funções

	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\omega)$
1.	$\begin{cases} 1 & \text{se } x < a, \\ 0 & \text{se } x > a. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$
2.	$\begin{cases} 1 & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$	$\frac{i(e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega})}{\sqrt{2\pi}\omega}$
3.	$\begin{cases} 1 - \frac{ x }{a} & \text{se } x < a, \\ 0 & \text{se } x > a, \end{cases} \quad , \quad a > 0.$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}^2 \frac{a\omega}{2}}{a\omega^2}$
4.	$\begin{cases} x & \text{se } x < a, \\ 0 & \text{se } x > a, \end{cases} \quad , \quad a > 0.$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\omega \cos(a\omega) - \text{sen}(a\omega)}{\omega^2}$
5.	$\begin{cases} \text{sen } x & \text{se } x < \pi, \\ 0 & \text{se } x > \pi, \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$

6.	$\begin{cases} \text{sen}(ax) & \text{se } x < b, \\ 0 & \text{se } x > b, \end{cases}, \quad a, b > 0.$	$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\text{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} - \frac{\text{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a} \right)$
7.	$\begin{cases} \cos(ax) & \text{se } x < b, \\ 0 & \text{se } x > b, \end{cases}, \quad a, b > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\text{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} - \frac{\text{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a} \right)$
8.	$\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a \omega }}{a}$
9.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{1 + a^2 x^2}, \quad a > 0.$	$e^{-\frac{ \omega }{a}}$
10.	$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}^2 \frac{ax}{2}}{ax^2}, \quad a > 0.$	$\begin{cases} 1 - \frac{ \omega }{a} & \text{se } \omega < a, \\ 0 & \text{se } \omega > a. \end{cases}$
11.	$e^{-a x }, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$
12.	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega}$

13.	$\begin{cases} 0 & \text{se } x > 0, \\ e^{ax} & \text{se } x < 0, \end{cases}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega}$
14.	$ x ^n e^{-a x }, \quad a > 0, n > 0.$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(a - i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(a + i\omega)^{n+1}} \right)$
15.	$e^{-\frac{a}{2}x^2}, \quad a > 0.$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

Propriedades de Transformadas de Fourier

♣ Linearidade

$$\mathcal{F}\{c_1 g(t) + c_2 h(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{g(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{h(t)\} = c_1 G(\omega) + c_2 H(\omega)$$

♣ Derivada $F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$

♣ Convolução $\rightarrow g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)g(\tau)d\tau$

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)] e^{i\omega t} dt$$

Outras propriedades de Transformadas de Fourier

♣ Translação

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

♣ Escalonamento

$$\mathcal{F}\{g(ct)\} = \frac{G(\omega)}{|c|}$$

TF de Derivadas

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Integrando por partes:

$$F_1(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{i\omega t} dt$$

$$F_1(\omega) = -i\omega \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega F(\omega)$$

Se a função for função de x , ao invés de t :

$t \rightarrow x$

$\omega \rightarrow k$

$$F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$$

n é a ordem da derivada

O que é convolução?

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Convolução

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)] e^{i\omega t} dt$$

Onde: $g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)g(\tau)d\tau$

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)g(\tau)d\tau e^{i\omega t} dt$$

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)g(\tau)d\tau e^{i\omega t} dt$$



$$G(\omega) H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{i\omega t} dt$$

Mas da propriedade
de translação em t:

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - a)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

Logo: $\mathcal{F}\{h(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau} H(\omega)$

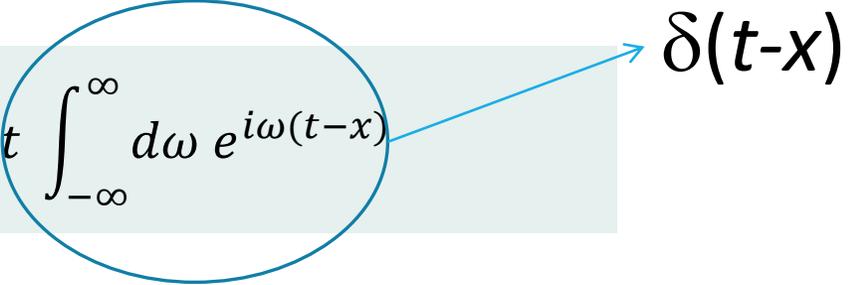
$$\begin{aligned} G(\omega) H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} H(\omega) d\tau \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= H(\omega) G(\omega) \end{aligned}$$

Uma representação para a Função Delta

Da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

Rearranjando:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-x)}$$


A função $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-x)}$ é uma das formas de se representar a função

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

$$x = t_0$$

delta de Dirac, pois:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt$$

Em termos de outras variáveis

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)} d\omega$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\omega-\omega_0)} dx$$

Matematicamente, a função delta não é uma função, porque é muito singular. De fato é uma "distribuição".

É uma ideia generalizada de função, mas esta função só pode ser usada dentro de integrais.

Propriedade:

$$\int dt f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0)$$

De fato $\int dt \delta(t - t_0)$ pode ser considerado como um “operador” que puxa o valor de uma função para t_0 .

Desta forma, soa perfeitamente legítimo e bem definido. Mas já que a função delta é eventualmente integrável, podemos usá-la como se fosse uma função.

Problemas, exemplos, exercícios

1) Difusão de neutrons

ϕ É o fluxo

variação de
densidade
de nêutrons
no tempo

$$\frac{\partial n}{\partial t} = s - \Sigma_a \phi - \nabla \cdot J$$

taxa de produção

taxa de absorção

taxa de vazamento

No estado estacionário: $-\nabla \cdot J = \Sigma_a \phi - s$

Equação de difusão de Fick: $J = -D\nabla\phi \rightarrow \nabla \cdot J = -D \nabla \cdot (\nabla\phi) = -D\nabla^2\phi$

$\phi(x)$ é o fluxo de nêutrons em 1D

$$-D \frac{d^2\phi}{dx^2} + K^2 D \phi(x) = Q \delta(x)$$

taxa de absorção

taxa de produção

Problemas usando TF

1) A equação de difusão de nêutrons em uma dimensão é dada por:

$$-D \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + K^2 D \varphi(x) = Q \delta(x)$$

Sendo $\varphi(x)$ o fluxo de nêutrons, $Q\delta(x)$ é uma fonte plana em $x = 0$; D , K^2 e Q não dependem de x .

Encontre a solução $\varphi(x)$ para a equação (1), usando transformada de Fourier.

Não há condições de contorno. Escolha as constantes indeterminadas que aparecem no desenvolvimento como constantes em x . Você poderá precisar das seguintes integrais:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z - a) dz$$





2) Resolução de equações diferenciais

Exemplo: Fluxo de Calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$



A parte em t fica imutável

$$\Psi(k, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) e^{ikx} dx$$

A transformação atua somente na variável x

$$\psi \rightarrow \psi(x, t) \rightarrow \Psi(k, t)$$

$$F(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

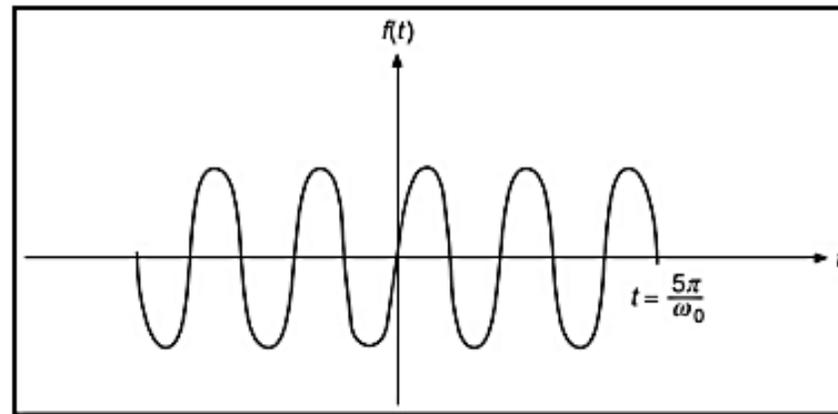


3) Cálculo da transformada de Fourier

Imagine um trem de ondas $\text{sen}\omega_0 t$ que seja limitado por um filtro de abertura finita.

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}\omega_0 t & \text{para } |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Isto corresponde a N ciclos do trem de ondas original.



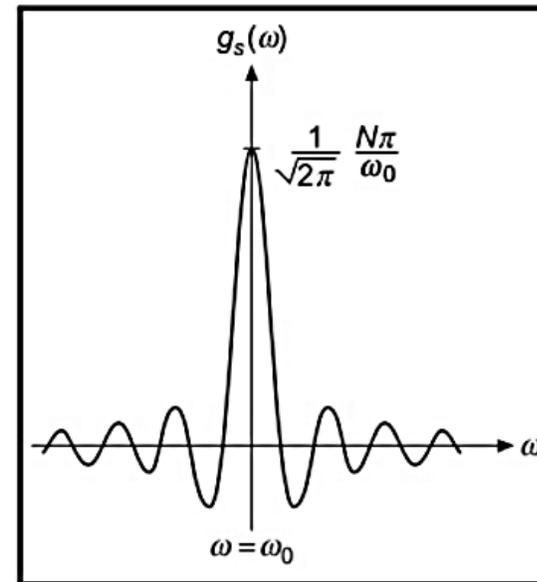
Exemplo $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\omega_0 t & \text{para } |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

Usando a tabela, onde $a = \omega_0$ e $t = x$, $b = N\pi/\omega_0$

6.	$\begin{cases} \text{sen}(ax) & \text{se } x < b, \\ 0 & \text{se } x > b, \end{cases} \quad a, b > 0.$	$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\text{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} - \frac{\text{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a} \right)$
----	---	---

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\text{sen}[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\text{sen}[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right]$$

Para $\omega \approx \omega_0 \rightarrow$ máximo



**Difração
Fenda única**

Função sinc (x) *sinus cardinalis* (seno cardinal)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Propriedades da função sinc(x):

1. sinc (x) é uma função par de x
2. sinc (x) = 0 nos pontos em que sin (x) = 0, isto é,
sinc (x) = 0 quando $x = n\pi$, sendo n um número inteiro
3. Usando a regra de L'Hôpital, pode ser mostrado que sinc (0) = 1
4. sinc (x) oscila quando sin (x) oscila e monotonicamente diminui à medida que $1 / x$ diminui com o aumento $| x |$

Para ondas eletromagnéticas:

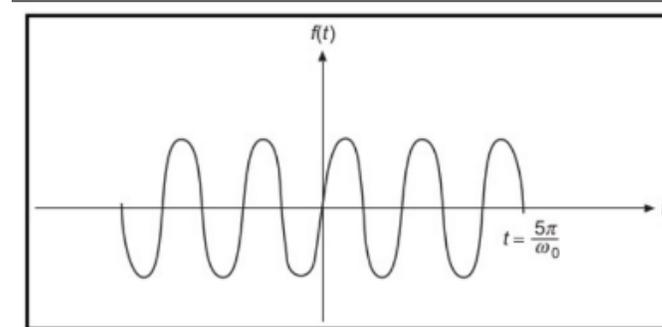
$$\omega = \frac{N\pi}{L} \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{N}$$

$E = h\omega/2\pi$ (energia do fóton) $\rightarrow \Delta E = h \Delta\omega/2\pi$; ΔE é a incerteza na energia do pulso.

Há também uma incerteza em relação ao tempo, porque a onda tem N ciclos, ela levará $\Delta t = 2.N.\pi/\omega_0$ ($\Delta t = N.T = N.1/f$) segundos para passar.

O produto: $\Delta E. \Delta t = h \Delta\omega/2\pi \times N2\pi/\omega_0 = h \times \Delta\omega/\omega_0 \times N = h$

Que de maneira “grosseira” é o **princípio de incerteza de Heisenberg**



Exemplo $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\omega_0 t & \text{para } |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

pulso $f(-t) = -f(t)$
IMPAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} \text{sen}\omega_0 t \text{ sen}\omega t dt$$

Fica de exercício calcular pela integral, ou seja, demonstrar a propriedade no. 6

2) Usando a definição, mostre que as transformadas de Fourier em seno e cosseno da função e^{-at} são dadas por:

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}\omega t dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega) \operatorname{sen}\omega t d\omega$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \operatorname{cos}\omega t dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega) \operatorname{cos}\omega t d\omega$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

3) Encontre a transformada de Fourier de um pulso triangular dado pela função a seguir, onde h é a altura do pulso:

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|) & \text{para } |x| < \frac{1}{a} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{1}{a} \end{cases}$$

http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/ciclo_seminarios/tecnicos/2010/TransformadaDeFourier.pdf

FÍSICA MATEMÁTICA - MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, **GEORGE ARFKEN**,
Ed. **CAMPUS ELSEVIER**.

Respostas

$$1) \varphi(x) = \frac{Q}{2D} e^{-K|x|}$$

$$3) F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h}{k^2} \left\{ -a + ik \left[\cos \frac{k}{2} - \left(1 + \frac{a}{2} \right) \sin \frac{k}{2} \right] \right\}$$

Resolução da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

O seu valor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi. \end{aligned}$$