TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Laplace

Transformada integral

- Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha,t)dt$$

$$f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha,t)d\alpha$$

A função *F(α)* é denominada de transformada integral de *f(t)* pelo núcleo *K(α,t), e vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função f(t) no espaço t para uma outra função, F(α), no espaço α.

- Transformadas integrais são ferramentas úteis para se resolver equações diferenciais de problemas com valor inicial.

Transformada de Laplace (TL)

Definição da TL

F(s) é a transformada de Laplace da função f(t)

Espaço t $\rightarrow$ para espaço s

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformada inversa

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(s)e^{-st}ds$$

$$\boxed{\begin{gathered} K(\alpha,t) = K(s,t) \\ \alpha = s \end{gathered}}$$

$\Downarrow$

Núcleo

$$K(s,t) = e^{-st}$$

Para $t > 0$

F(s) é a Transformada de Laplace de *f(t)* e vice-versa

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Transformadas de Laplace de funções elementares

Tabela de TL de funções elementares

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t\sin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t\cos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(n$ número inteiro$)$	$t\cosh(kt)$	$\frac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$t\sinh(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$1-\cos(kt)$	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
$\sin^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\cos^2(kt)$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Como chegar nessas relações?

Cálculo da TL para funções elementares – I

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \iff f(t) = \int_0^{\infty} F(s) e^{-st} ds$$

Exemplos:

$$f(t) = 1 \iff F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \cos at \iff F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Cálculo da TL para funções elementares – usando a Tabela

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh(bt)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{bt} + e^{-bt}\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{bt}\} + \mathcal{L}\{e^{-bt}\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s+b+s-b}{s^2-b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-b^2}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-b^2}.
\end{aligned}
$$

$$f(t) = e^{at}$$

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-a}$$

Propriedades da TL

	$f(t)$	$F(s)$
Linearidade	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
Escalamento	$\alpha f(\alpha t)$	$F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Deslocamento na frequência	$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$

Propriedades da TL

Deslocamento no tempo

Transformada de Laplace da derivada

Derivada da transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$u(t-\alpha)=\begin{cases} f(t-\alpha) & t>\alpha \\ 0 & t<\alpha \end{cases}$	$e^{-\alpha s}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$t^2f(t)$	$F''(s)$

Mais propriedades da TL

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$\int_0^t \cdots \int_0^t f(u)\,du^n = \int_0^t \dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,du$	$\dfrac{F(s)}{s^n}$
$\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

Como calcular a transformada inversa?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh(bt)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{bt} + e^{-bt}\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{bt}\} + \mathcal{L}\{e^{-bt}\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s+b+s-b}{s^2-b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-b^2}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-b^2}.
\end{aligned}
$$

Transformada inversa :

Expansão por Frações Parciais

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

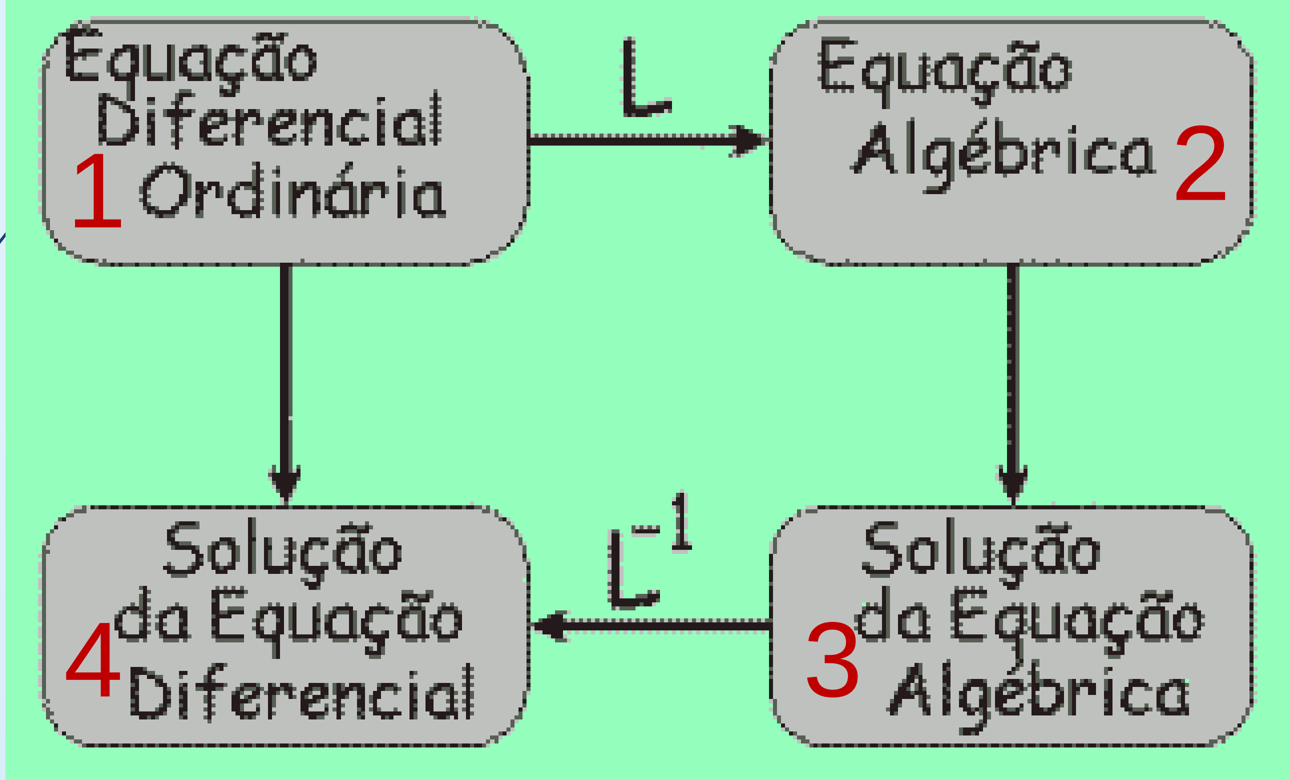
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{\pm \alpha t}\} = \frac{1}{s \mp \alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s \mp \alpha}\right\} = e^{\pm \alpha t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s^2-6s}\right\} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

Utilização:

resolução de equações diferenciais com condições iniciais.



Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

Aplica a TL na equação diferencial

$$\int_0^\infty \frac{d^2y}{dt^2}\, e^{-st} dt + \int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \int_0^\infty sen2t\, e^{-st} dt\, sen2t$$

Ou

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\} \Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \int_0^\infty y\, e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

Da Tabela TL de funções elementares

f(t) = y(t) e F(s) = Y(s)

$f(t)$	$F(s)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\frac{sen(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$

Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{sen2t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Substitui-se os valores iniciais: y(0) = 2 e y'(0)=1

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Isola-se Y(s):

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n} \quad n = 1,2,3,\ldots$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n} \quad n > 0$
$\delta(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}$
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

A ideia é escrever Y(s) em vários termos já conhecidos da Tabela de TL e calcular a transformada inversa para obter y(t):

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Frações parciais

$$Y(s) = \frac{\boxed{2s^3 + s^2 + 8s + 6}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Devem ser iguais

$$Y(s) = \frac{as+b}{(s^2+1)} + \frac{cs+d}{(s^2+4)} \Rightarrow Y(s) = \frac{\boxed{(as+b)\times(s^2+4) + (cs+d)\times(s^2+1)}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Expandindo o numerador de Y(s)

$$(as+b)\times(s^2+4) + (cs+d)\times(s^2+1) = (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d)$$

Logo:

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6$$
$$= (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d)$$

Comparando-se os termos, determina-se a, b, c e d:

$$a + c = 2 \qquad b + d = 1$$

$$4a + c = 8 \qquad 4b + d = 6$$

$$Y(s) = \frac{as+b}{(s^2+1)} + \frac{cs+d}{(s^2+4)}$$

$$\begin{gathered} a+c=2 \\ b+d=1 \\ 4a+c=8 \\ 4b+d=6 \end{gathered}$$

a = 2
b = 5/3
c = 0
d = -2/3

$$Y(s) = 2\frac{s}{(s^2+1)} + \frac{5}{3}\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{3}\frac{2}{(s^2+4)}$$

Aplicando-se a TL inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

Logo, a solução y(t) para a ED com condições iniciais é:

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = sen2t$$

Com y(0) = 2 e y'(0)=1

$f(t)$	$G(s)$
$\mathrm{sen}(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

Exercícios para TL

1) Mostrar que: $\mathcal{L}\{e^{\beta t}\sin\alpha t\} = \frac{\alpha}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$

1) Mostrar que: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

1) Usando o método das frações parciais mostre que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{(a-b)} \text{ com a} \neq \text{b}$$

1) Encontre a solução da ED do oscilador harmônico simples usando TL, sendo m a massa do oscilador, a mola é ideal e tem constante elástica k, desprezando o atrito. As condições iniciais são: *$u(0)=u_0$ e $u'(0)=0$. A função deslocamento da mola é função do tempo t.*

$$m\,\frac{d^2u}{dx^2} + ku = 0$$

- FÍSICA MATEMÁTICA – MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, **GEORGE ARFKEN,** Ed. **CAMPUS ELSEVIER.**