

Resolução das equações

- **Equação de Difusão (calor) (1D)**
- **Equação de ondas (corda vibrante) (1D)**
- **Equação de Laplace (2D)**
 - **Difusão térmica em estado estacionário (2D e 3 D);**
 - **Função potencial de uma partícula livre no espaço sob ação de forças gravitacionais;**
 - **Etc**

Equação de Laplace (2D)

- ▶ Eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- ▶ Hidrodinâmica,
- ▶ Fluxo de calor,
- ▶ Gravitação.

Problema $\nabla^2 u = 0$ ou $\Delta u = 0$

Independente do tempo \rightarrow não tem condições iniciais!

Em 2D : 4 condições de contorno, uma para cada fronteira (2 para cada dimensão)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Condições de contorno

- 1) *Sobre a função $u(x,y) \rightarrow$ Problema de Dirichlet*
- 2) *Sobre as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y \rightarrow$ Problema de Neumann*

Resolução: Problema de Dirichlet em um retângulo

Problema Matemático

The diagram shows a rectangular domain in the xy -plane. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The origin is marked with 0 . The right boundary is at $x = a$ and the top boundary is at $y = b$. The boundary conditions are: $u(x, b) = 0$ (top), $u(x, 0) = 0$ (bottom), $u(0, y) = 0$ (left), and $u(a, y) = f(y)$ (right). Inside the rectangle, the Laplace equation is given as $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Condições de contorno para o retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$:

$$u(x, 0) = 0 \text{ e } u(x, b) = 0 \text{ para } 0 < x < a$$

$$u(0, y) = 0 \text{ e } u(a, y) = f(y) \text{ para } 0 \leq y \leq b$$

Separação de variáveis: $u(x,y) = X(x) Y(y)$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2$$

λ é a constante de separação, se λ é um número real e chega-se as EDOs:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A. \cosh \lambda x + B. \sinh \lambda x \quad e^{\pm \lambda x}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C. \cos \lambda y + D. \sin \lambda y \quad e^{\pm i \lambda y}$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\text{sen } y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$A e^{iy} + B e^{-iy} \equiv A \cos y + B \text{sen } y$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\text{senh } y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$A e^y + B e^{-y} \equiv$$

$$A \cosh y + B \text{senh } y$$

Aplicando as CC (y):

$$u(x,y) = X(x) Y(y) = (A. \cosh \lambda x + B. \sinh \lambda x)(C. \cos \lambda y + D. \sin \lambda y)$$

$$u(x, 0) = 0 \rightarrow X(x). Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0$$

$$u(x, b) = 0 \rightarrow X(x). Y(b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0$$

$$Y(y) = C. \cos \lambda y + D. \sin \lambda y$$

$$Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = C. \cos \lambda 0 + D. \sin \lambda 0 = C = 0$$

$$Y(y) = D. \sin \lambda y$$

$$Y(b) = 0 \rightarrow Y(b) = D. \sin \lambda b = 0 \rightarrow \lambda b = n\pi$$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \rightarrow Y(y) = D. \sin \frac{n\pi y}{b} \rightarrow u(x,y) = (A. \cosh \lambda x + B. \sinh \lambda x) D. \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$u(x,y) = (A. \cosh \lambda x + B. \sinh \lambda x) D. \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Aplicando as CC (x):

$$u(0, y) = 0 \rightarrow X(0). Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

$$u(a, y) = 0 \rightarrow X(a). Y(y) = 0 \rightarrow X(a) = f(y)$$

$$u(0, y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \quad X(x) = A. \cosh \lambda x + B. \sinh \lambda x$$

$$X(0) = A. \cosh \lambda 0 + B. \sinh \lambda 0 \rightarrow A = 0$$



$$u(x,y) = (B. \sinh \lambda x) D. \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$B.D = A_n$$



$$u_n(x,y) = A_n \times \sinh \frac{n\pi}{b} x \times \sin \frac{n\pi}{b} y$$

A solução geral é a superposição linear de todas as soluções u_n e agora resta apenas a constante A_n para ser determinada.

$$u_n(x,y) = A_n \times \sinh \frac{n\pi}{b} x \times \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Resta a **última condição de contorno** a ser aplicada: $u(a,y) = f(y)$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

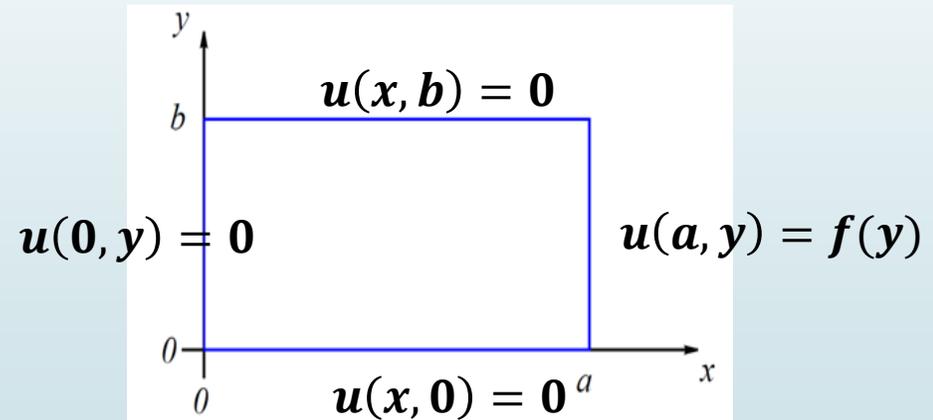
$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Indépende de y

$$f(y) = \sum_n B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Série de Fourier:

$$B_n = A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$





Logo:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Determina-se A_n por:

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

E assim $u(x,y)$ fica determinada, dependendo do que é a função $f(y)$.



Exemplo para $f(y) = y$

Para determinar a solução final da equação de Laplace em 2D em coordenadas cartesianas com as CC apresentadas, é preciso determinar A_n a partir de $f(y) = y$:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \frac{2}{b} \int_0^b y \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$


$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \int_0^b y \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$\int_0^b y \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dy = -\frac{b^2}{n\pi} (-1)^n = \frac{b^2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \frac{b^2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$



$$A_n = \frac{2b}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}}$$

Finalmente

$$u(x,y) = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Exemplo para:

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{para } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & \text{para } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Com: a=3 e b=2

Neste caso:

$$A_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh \frac{3n\pi}{2}}$$

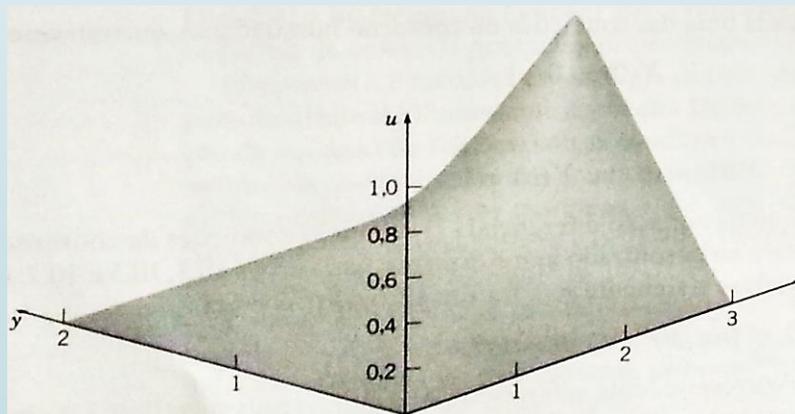
$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh \frac{3n\pi}{2}} \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Exemplo para:

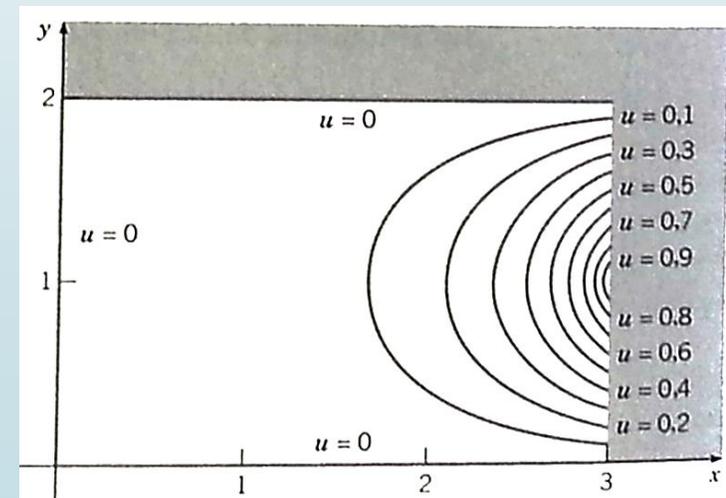
$$f(y) = \begin{cases} y & \text{para } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & \text{para } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Com: $a=3$ e $b=2$

Gráfico de $u(x,y)$ para $n = 20$



Curvas de nível de $u(x,y)$

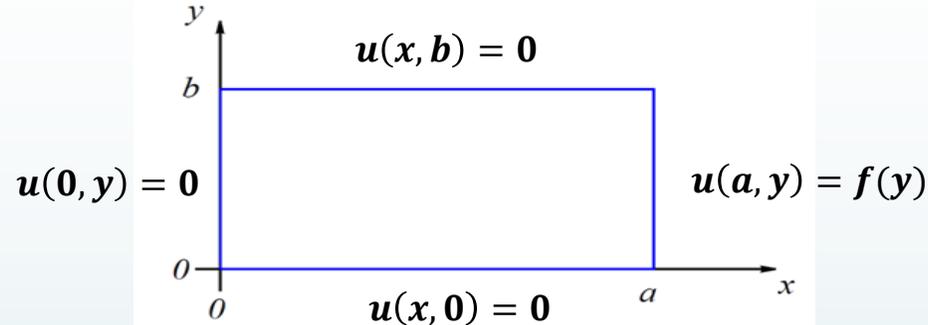


Resumo: Laplace coordenadas retangulares em 2D

Problema de Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x,y) = X(x) Y(y)$$



$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0$$



$$X(x) = A \cdot \cosh \lambda x + B \cdot \sinh \lambda x$$

$$X(x) = B \cdot \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0$$



$$Y(y) = C \cdot \cos \lambda y + D \cdot \sin \lambda y$$



$$Y(y) = D \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{b}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$



$$u(a, y) = f(y)$$

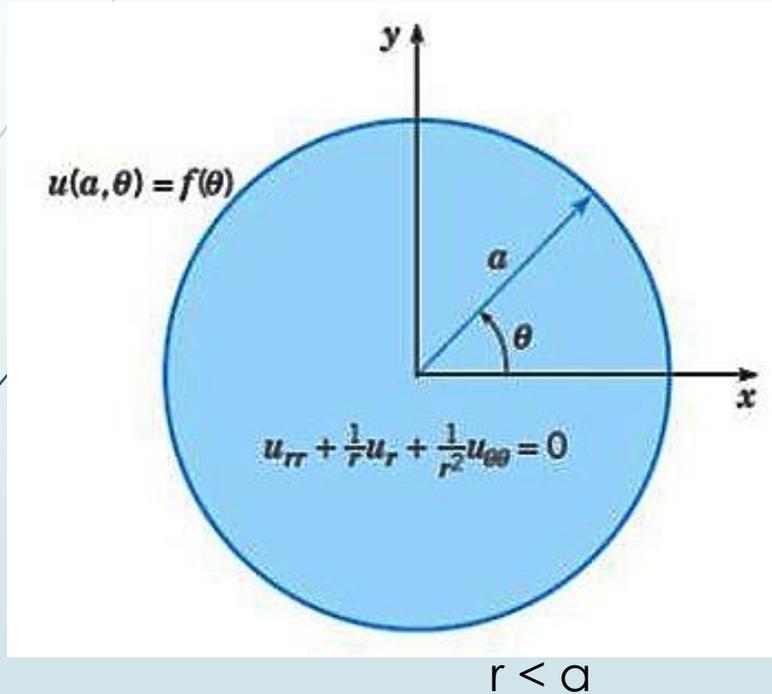
$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

com

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

Resolução: Eq de Laplace em um círculo

Coordenadas cilíndricas com $z = 0$



$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0.$$

$$u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; \quad u_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad u_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Para $r < a$ e $u(a, \theta) = f(\theta)$

$f(\theta)$ é uma função dada em $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$u(r, \theta)$ é periódica de período 2π e finita em $r=0$

Separação de variáveis: $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$;
Substitui as derivadas parciais de $u(r, \theta)$ na equação de Laplace abaixo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

Multiplica por r^2 e divide por $R \Theta$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda$$

Separando as equações em R e Θ :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda \Theta = 0$$

Singularidade
para $r=0$

*É possível mostrar que $u(r, \theta)$ é periódica de período 2π , **somente se λ for um número real.***

Estudaremos os casos: $\lambda < 0$ e $\lambda \geq 0$

Quais as condições que permitem resolver este problema ?

1) A função $\Theta(\theta)$ deve ser periódica no círculo,

ou seja: $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$; $\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$

2) A função $R(r)$ deve ser finita para $r \rightarrow 0$;

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

3) Além de : $u(a, \theta) = f(\theta)$



Equação de Euler

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

$$\alpha=1 \text{ e } \beta = -\lambda$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

Procurar soluções do tipo: $R = r^k$;

$$x^k [k^2 - \lambda] = 0 \quad \rightarrow \quad x^k \neq 0$$

Equação de Euler

Soluções do tipo: $R(r) = r^k$

$$[k^2 - \lambda] = 0$$

As raízes para k são:

$$k_i = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \quad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Lembrando ... λ é um número real

Estudo dos valores de λ

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

Soluções do tipo: $R(r) = r^k$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \quad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

1) Se $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \mu^2\Theta = 0$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh(\mu\theta) + c_2 \sinh(\mu\theta)$$

ou

$$\Theta(\theta) = c_3 e^{\mu\theta} + c_4 e^{-\mu\theta}$$

Aplicando as condições de periodicidade $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

$$c_3 + c_4 = c_3 e^{2\pi\mu} + c_4 e^{-2\pi\mu} \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_4 = 0$$

$$\Rightarrow \Theta(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r, \theta) = 0 \quad \text{Solução trivial}$$

Portanto, $\lambda < 0$ não é solução

2) Se $\lambda = 0$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$$

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = c_1$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = 0$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda}$$

$$k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = 0$$

Eq. De Euler para $k_1=k_2$

$$a_2 = 0$$

$$\Rightarrow R(r) = (a_1 + a_2 \ln r) \cdot r^{k_2} = (a_1 + a_2 \ln r) \cdot r^0$$

$$u_\lambda(r, \theta) = u_0(r, \theta) = a_1.$$

3) Se $\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \mu^2$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mu^2\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta(\theta) = c_1 \cos \mu\theta + c_2 \sin \mu\theta$$

$$\Rightarrow \Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow c_1 \overset{1}{\cancel{\cos \mu 0}} + c_2 \overset{0}{\cancel{\sin \mu 0}} = c_1 \cos \mu 2\pi + c_2 \sin \mu 2\pi$$

$$\cos \mu 2\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = n$$



$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots$$

Continuando ... Se $\lambda > 0 \rightarrow \mu^2 = \lambda = n^2$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$$

$$R(r) = r^k$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \quad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$\rightarrow k_1 \neq k_2, k_1 = n \text{ e } k_2 = -n$$

$$R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$$

Para $r \rightarrow 0$ escolhe-se $c_4 = 0$, função não diverge em $r \rightarrow 0$

$$R(r) = c_3 r^n$$

Finalmente: $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$

$$\lambda > 0 \text{ e } \lambda = n^2$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

$$R(r) = c_3 r^n$$

$$u_n(r, \theta) = \Theta_n(\theta) * R_n(r) = r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$u(r, \theta) = \sum u_n(r, \theta)$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$\lambda = 0$$

$$\Theta(\theta) = c_1$$

$$R(r) = c_1$$


$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Mas: $u(a, \theta) = f(\theta)$

$$f(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Onde

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

Exemplo: $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Com:

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

Substituindo-se $f(\theta)$:

$$c_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta) \cos n\theta \, d\theta \quad k_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta) \sin n\theta \, d\theta$$

Para calcular as integrais a tabela de integrais pode ser útil:

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$