



# Resolução das equações

## EDP

- **Equação de Difusão (calor) (1D)**
  - **(2 variáveis: espaço  $x$  e tempo  $t$ )**
- **Equação de ondas (corda vibrante) (1D)**
  - **(2 variáveis: espaço  $x$  e tempo  $t$ )**
- **Equação de Laplace (2D)**
  - **(2 variáveis: espaço  $x$  e  $y$ )**



# Equação de Difusão de Calor – 1 D

A equação mais geral unidimensional é dada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t}$$

$$T = T(x, t)$$

T é a temperatura;

$c_p$  é o calor específico;

$\rho$  é a densidade de massa;

k é a condutividade térmica;

$\dot{q}_g$  é a taxa de geração de calor.

# Problema específico

Barra longa de secção reta uniforme feita de uma material homogêneo de comprimento L.

- **Material homogêneo** →  $k$  é constante em  $x$
- **Extremidades isoladas:**  $\dot{q}_g = 0$ ;



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

- **Condição de contorno:**  $T(0,t) = T(L,t) = 0$
- **Condição inicial** → em  $t = 0$  →  $T(x,0) = f(x)$

- *Material homogêneo*  $\rightarrow k$  é constante em  $x$
- *Extremidades isoladas*:  $\dot{q}_g = 0$ ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$



$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$



Difusividade ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$$a^2 = \frac{k}{\rho c_p}$$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

# Resolução

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

*Método da Separação de variáveis*

$$T(x,t) = X(x) \tau(t)$$

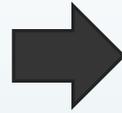
$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 a^2 \tau = 0$$

## Resolvendo as equações diferenciais

*Em x:*

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$



$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

*Em t:*

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 a^2 \tau = 0$$



$$\tau(t) = C \exp(-\lambda^2 a^2 t)$$

*Mas:  $T(x,t) = X(x) \tau(t)$*

$$T(x,t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) [C \exp(-\lambda^2 a^2 t)]$$

$$T(x,t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) [C \exp(-\lambda^2 a^2 t)]$$

- **Condição de contorno:  $T(0,t) = T(L,t) = 0$  (somente x!)**

$$T(0,t) = (A \times \cos 0 + B \sin 0) [C \exp(-\lambda^2 a^2 t)] = 0$$

$$A = 0, B \neq 0$$

$$T(L,t) = (B \sin \lambda L) [C \exp(-\lambda^2 a^2 t)] = 0$$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

- **Depois de aplicadas as condições de contorno**

$$T_n(x,t) = B \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left[ C \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right) \right]$$

*Para cada valor de n eu tenho uma função diferente*


$$T_n(x,t) = B \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \left[ C \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right) \right]$$

- **A solução geral é a superposição (combinação linear) de todas as soluções:**

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \left[ C_n \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right) \right] \right)$$

$$D_n = B_n \cdot C_n$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right)$$


$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right)$$

- Finalmente aplicando a:

Condição inicial  $\rightarrow$  em  $t = 0 \rightarrow T(x, 0) = f(x)$

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \exp(0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

**Condição inicial para determinar as constantes  $D_n$ s**



Logo:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right)$$

com

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$



**Série de Fourier em senos!**

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Portanto, para a determinação da distribuição de temperatura em uma barra longa de secção reta uniforme, feita de um material homogêneo de comprimento  $L$ , é necessário resolver a eq. diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Resolvendo por separação de variáveis resulta que a distribuição de temperatura é dada por:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 t \right)$$

com  $D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

## Algumas possibilidades de distribuição de temperatura inicial:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{600}{L}x & \text{para } 0 \leq x < L/2 \\ 600 - \frac{600}{L}x & \text{para } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

Fisicamente significa que a temperatura inicial da barra cresce linearmente de 0 a 300 graus até o centro da barra ( $L/2$ ) e diminui de 300 a zero do centro até o final da barra ( $L$ ).

$$2) f(x) = 300$$

Fisicamente significa que a temperatura inicial da barra é constante e igual a 300 graus.

etc