Série de Fourier

Funções Periódicas

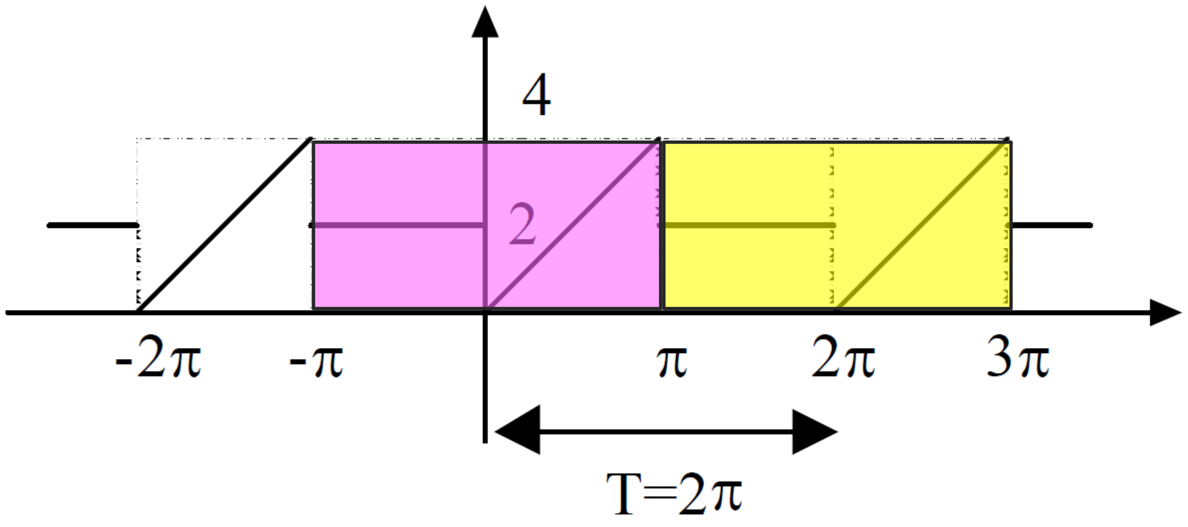
As **funções periódicas** podem ser definidas como aquelas funções f(t) para as quais:

$$f\,(t) = f\,(t + T)$$

A menor constante T que satisfaz f(t) é chamada **período** da função f(t).

Por iteração :

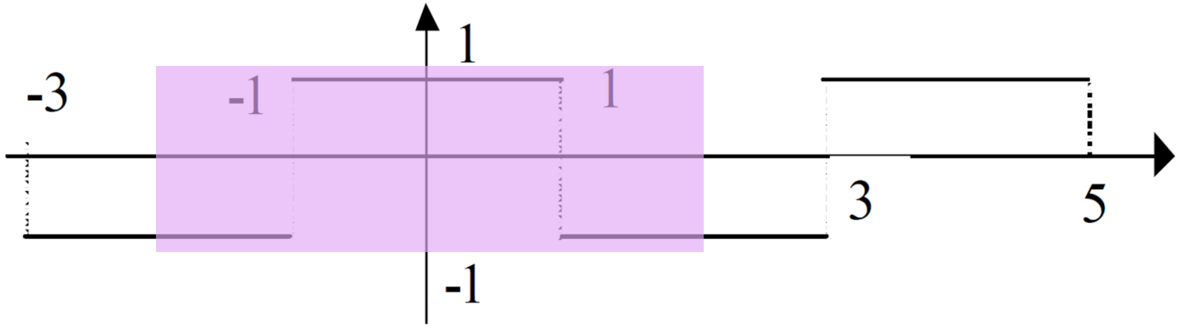
$$f\,(t) = f\,(t + nT),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



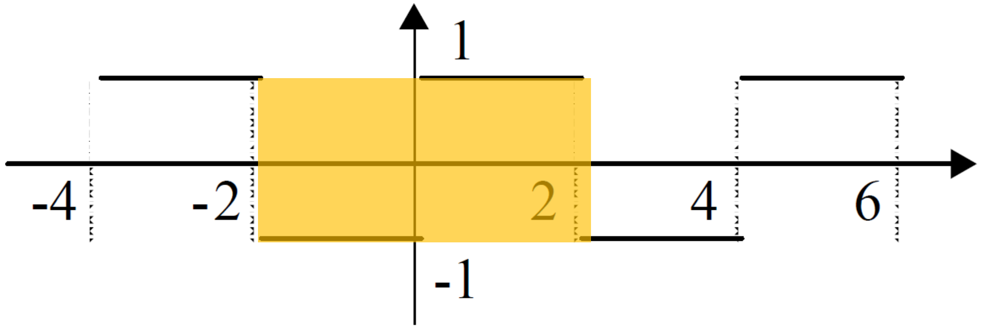
Propriedades de Paridade

Deve ser analisada em x=0 e y=0

função par se f(-x) = f(x)



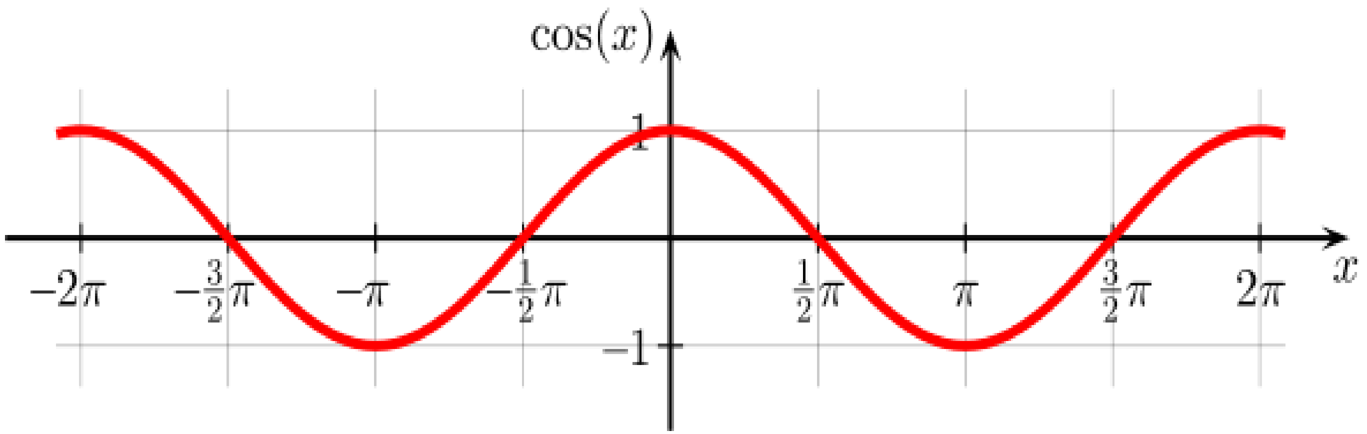
função impar se f(-x) = - f(x)

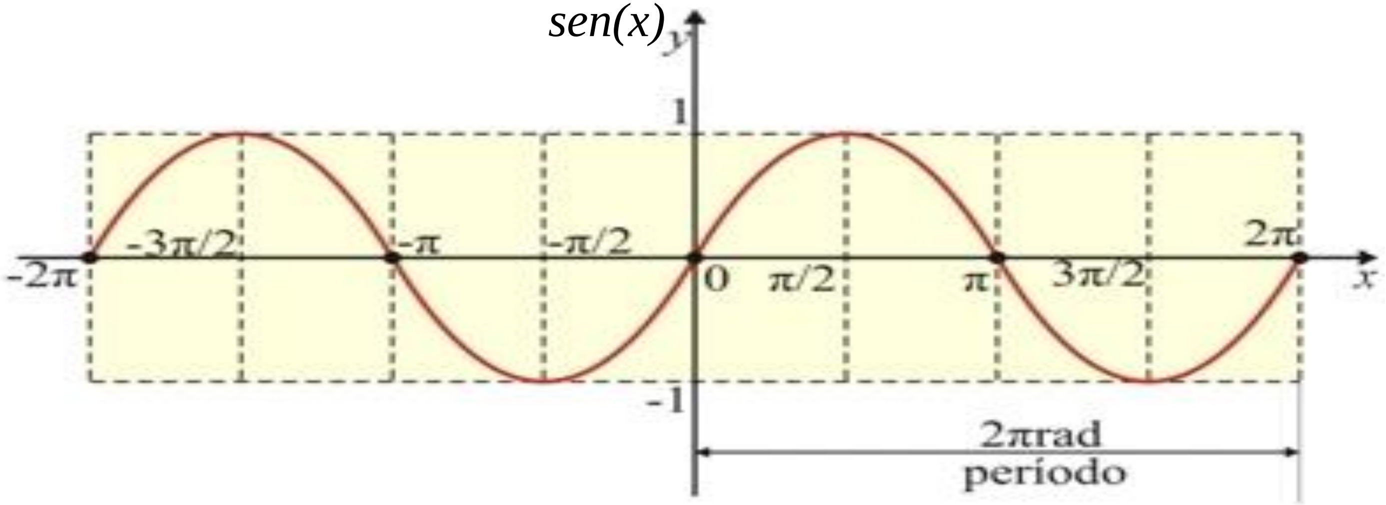


Funções seno e cosseno

FUNÇÕES PERIÓDICAS!

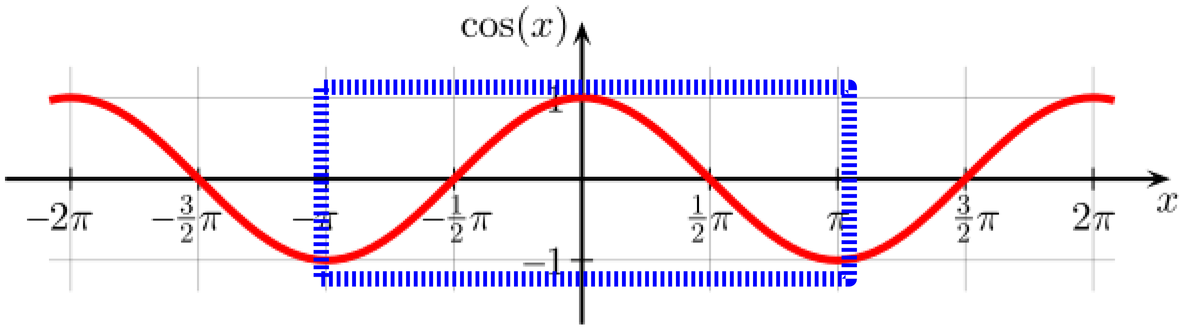
Funções *cos(x)* e *sen(x)*



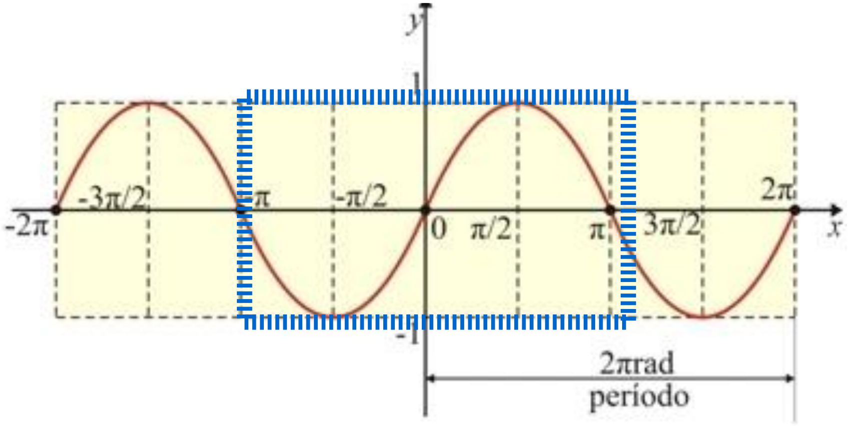


Propriedades de Paridade

função par se f(-x) = f(x)



função impar se f(-x) = - f(x)



Integração de funções pares e ímpares em intervalos simétricos

- **Se a função for ímpar**

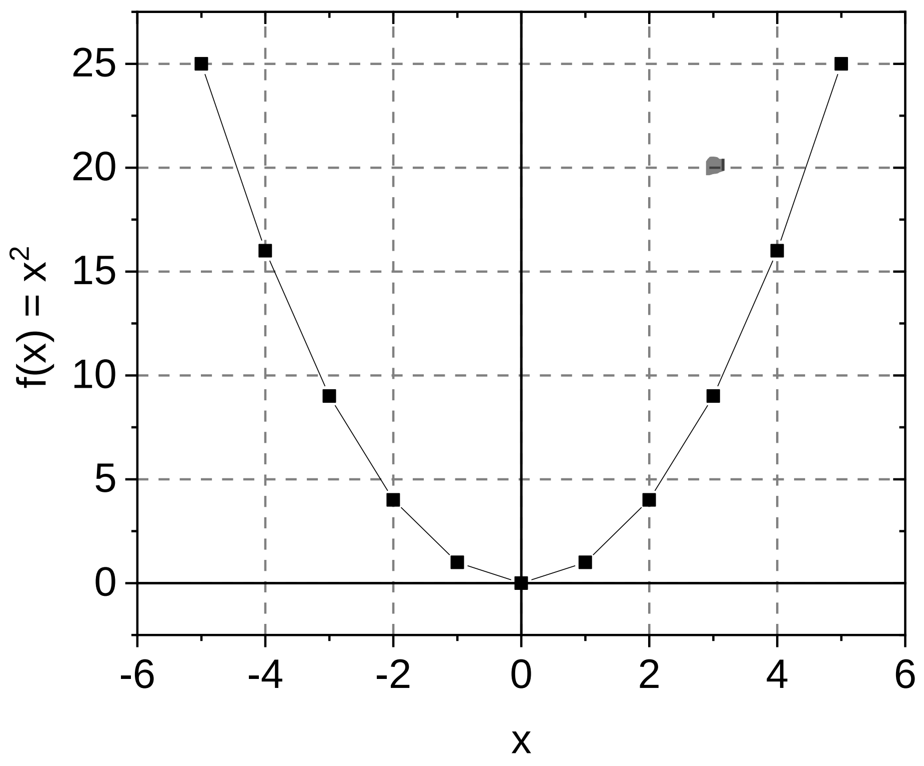
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

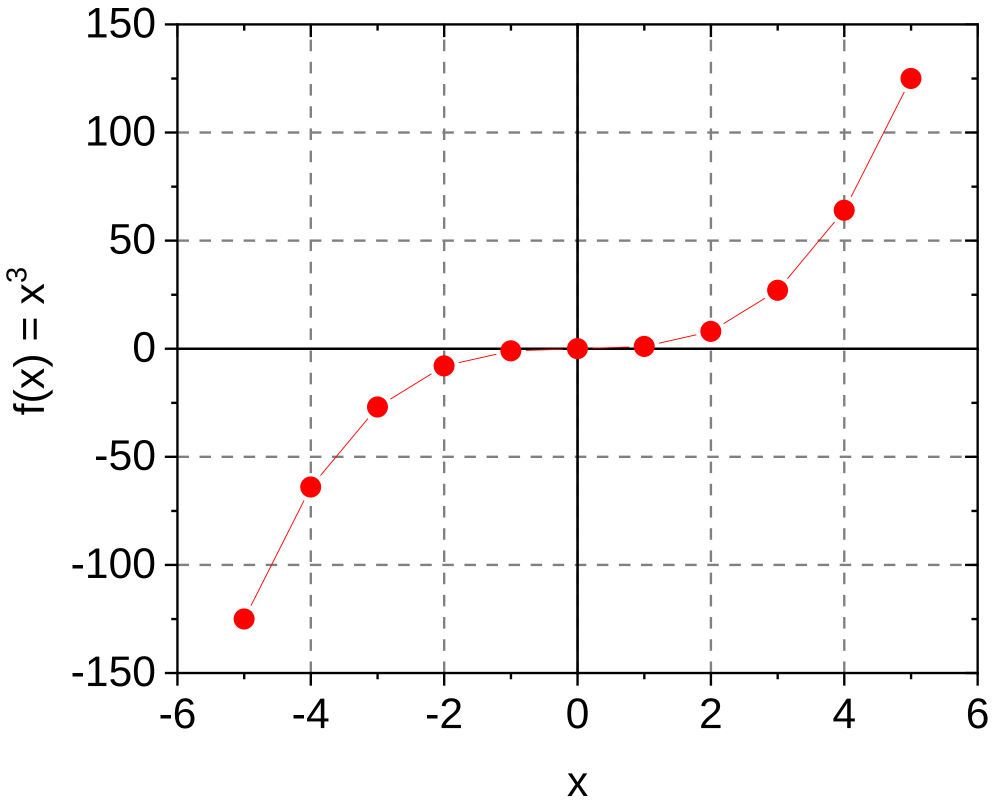
- **Se a função for par**

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Integração de funções pares e ímpares

Graficamente





Relações de ortogonalidade

$$a)\ \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx = 0 \quad (\text{para todos os } n, m)$$

$$b)\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ 2\pi & (\text{se } n = m = 0) \\ \pi & (\text{se } n = m \neq 0) \end{cases}$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{ sen } mx \, dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ \pi & (\text{se } n = m) \end{cases}$$

Como se fosse um produto escalar entre dois vetores

É possível mostrar estas relações usando :

- sen (a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a
- sen (a – b) = sen a . cos b – sen b . cos a
- cos (a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b
- cos (a – b) = cos a . cos b + sen a . sen b

Funções Periódicas

Representadas por séries de Fourier

Série Trigonométrica

- Uma série formada por senos e cossenos da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

- Se f(x) converge uniformemente no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, a série convergirá uniformemente para todos os valores de x.

Período = 2π

- Os coeficientes a_n e b_n podem ser qualquer número real $\rightarrow$ SÉRIE TRIGONOMÉTRICA

Definição de Série de Fourier

- Uma série formada por senos e cossenos da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

- Convergência igual à da serie trigonometrica

- PORÉM $\rightarrow$ A série para f(x) será uma **SÉRIE DE FOURIER** se os a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0)$$

Período = 2π

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (n > 0)$$

O período 2π não é obrigatório na teoria das séries de Fourier.

- A substituição de **x** por **(2π/T)t** fornece uma série com período T:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\,nx),}$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n\geq 0)}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx\quad(n>0)}$$

Forma matemática

nx - não tem unidade

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\,\mathrm{sen}(n\omega t)\right)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt$$

O período 2π não é obrigatório na teoria das séries de Fourier.

- A substituição de **x** por **(2π/T)t** fornece uma série com período T:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \,\mathrm{sen}(n\omega t) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \mathrm{sen}(n\omega t)\, dt$$

$\omega = 2\pi / T$ é denominada **freqüência angular fundamental** da função f(t)

a série de Fourier resultante deverá reproduzir f(t) no intervalo

$$-T/2 < t < T/2$$

Em Física: A função pode ser em função de r ou t, espaço ou tempo

Em muitas aplicações, quando x representa uma distância, usar o período 2L é mais conveniente.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx \quad (n > 0)$$

$x \rightarrow (n\pi/L)r$; ($\pi \rightarrow L$)

$x \rightarrow kr$ com $k = (n\pi/L)$

$$f(r)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi r}{L}\right)+b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{L}\right)\right],$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(r)\cos\left(\frac{n\pi r}{L}\right)dr$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(r)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{L}\right)dr$$

$k = (n\pi/L)$ é o vetor de onda

Rede recíproca

Séries em cossenos ou senos (1D: r = x)

- Cosseno

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$b_n = 0$$

- Seno

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Vantagens da Representação de Fourier

- Expansão de funções descontínuas
- Expansão de funções periódicas

Onda quadrada

Onda dente de serra