Funções Contínuas

Seja $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função definida em intervalo aberto A.

Def: Dizemos que f é contínua em $p \in A$ se

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

é. dado $N(f(p))$, $\exists\ N(p) \subset A$ tal que

$f(x) \in N(f(p))$ $\forall x \in N(p)$ com $x \neq p$.

i.e. dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$

sempre que $0 < |x - p| < \delta$ com $(p - \delta, p + \delta) \subset A$.

Exemplo. 1) $f(x) = c$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e algum $c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to p} f(x) = c = f(p) \quad \forall\ p \in \mathbb{R}.$$

$\therefore$ f é contínua em qq. $p \in \mathbb{R}$.

OBS: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em A se é contínua em qq. ponto de seu domínio.

2) $f(x) = x \quad , x \in \mathbb{R}$. Vimos que $\forall\, p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to p} f(x) = p = f(p) \quad \therefore f \text{ é contínua em } \mathbb{R}.$$

3) $f(x) = [x] \quad , x \in \mathbb{R}$. Vimos que $\forall p \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = [p]$, mas para $p \in \mathbb{Z}$ então

$\nexists \lim\limits_{x \to p} f(x)$. Nesse caso f é contínua em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Def: Qdo f não é contínua em um ponto $p \in \mathbb{R}$ dizemos que f é descontínua em p.

OBS: Para que f seja descontínua em p, basta que $p \notin$ domínio de f.

4) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ ✓ $p \neq 0$

Mas $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ | f é contínua

Seja $p \neq 0$, spg. $p > 0$.

$0 < |x-p| < \delta$

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{p^2} - \frac{1}{x^2} \right| = \frac{|x^2 - p^2|}{p^2 x^2} = \frac{|(x-p)(x+p)|}{p^2 x^2}$$

$$|x-p| < \delta \iff x \in (p-\delta, p+\delta)$$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{p^2} \qquad x+p \leq 2p+\delta$$

$\llcorner\, x \geq p/2$

$\delta \leq p/2$

$$\left| \frac{1}{p^2} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{4\delta(2p+\delta)}{p^4} < \varepsilon$$

$$4\delta^2 \leq 4\delta(2p+\delta) < p^4\varepsilon$$

$$\therefore \ \delta^2 \leq \frac{p^4\varepsilon}{4} \qquad \delta \leq \frac{p^2\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

Note que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \min\left\{ p/2, \dfrac{p^2\sqrt{\varepsilon}}{2} \right\}$

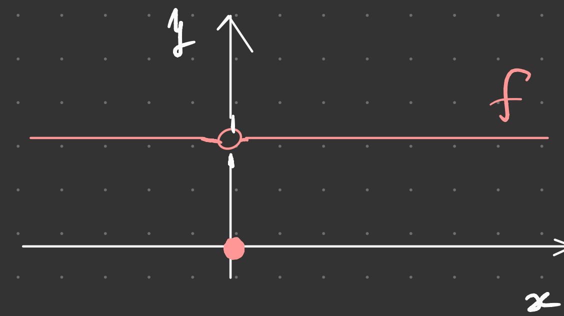
tal que $\left| \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{x^2} \right| < \varepsilon$ sempre que

$0 < |x - p| < \delta$ com $p > 0$.

$\therefore \displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = \frac{1}{p^2} = f(p)$ é contínua em p.

Analogamente se obtém $\displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ $p < 0$.

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$$

$\therefore$ f é descontínua em $x = 0$.

Podemos considerar $\bar{f}(x) = 1$ como a função definida por f removendo o ponto de descontinuidade $x = 0$.

Def: Seja $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A aberto, e $p \in A$ com $\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$. (Note que f é descontínua em p). Tal descontinuidade é chamada de removível.

Exemplos: 1) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ não é descontinuidade removível.

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$\forall p \in \mathbb{R}$ temos $\nexists \lim\limits_{x \to p} f(x)$. Com efeito,

se $p \in \mathbb{Q}$, então $\forall N(p)$ existe $x, y \in N(p)$ com

$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}$ $\therefore$ $|f(x) - f(y)| = 1$.

Analogamente obtemos a mesma conclusão com $p \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Teo. Sejam f, g funções t.q. $\lim_{x \to p} f(x) = A$ e

$\lim_{x \to p} g(x) = B$. Então: $g(x) \neq 0$ em alguma $N(p)$.

$B \neq 0$ então

a) $\lim_{x \to p} \{ f(x) \pm g(x) \} = A \pm B$.

b) $\lim_{x \to p} f(x) g(x) = AB$

c) Se $B \neq 0$, $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = A/B$.

Corolário. Sejam f e g contínuas em $x = p$, então $f \pm g$, fg são contínuas em $x = p$. Se $g(p) \neq 0$, então $(f/g)(x)$ também é contínua em $x = p$.

Exemplos: 1) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

p é soma finita de funções $c x^m$.

$C = f(x)$

contínuo

em $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = x^m = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m\text{-vezes}}$$

$f(x) = x$ é contínua

em $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ com p e q polinômios.

$A = \text{Domínio de } r = \{x \in \mathbb{R} ;\ q(x) \neq 0\}$. Note que r é contínua em A.

Seja $a \in A \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

e $\exists \lim_{x \to a} q(x) = q(a) \neq 0$

$\therefore \exists \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = r(a)$.

$\therefore$ r é contínua em a, $\forall a \in A$