ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

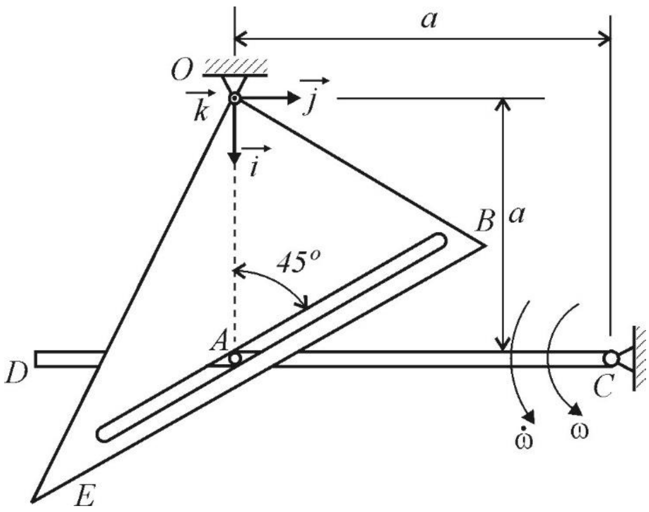
Cinemática do Sólido – Parte 5

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exemplo 2: No mecanismo da figura, o pino *A*, rigidamente ligado à barra *CD*, percorre o rasgo *EB* da placa *OBE*. Na posição mostrada, a barra *CD* está girando em torno de *C* com velocidade angular absoluta ω e aceleração angular absoluta $\dot{\omega}$. Determine, com relação ao referencial móvel $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ indicado, rigidamente ligado à placa *OBE*:



a) a velocidade absoluta de *A*;

b) as velocidades relativa e de arrastamento de *A*;

c) a velocidade angular de *OBE*;

d) a aceleração absoluta de *A* da barra;

e) a aceleração complementar de *A* da barra;

f) notando que a aceleração relativa de *A* tem a direção do rasgo *EB*, determine as acelerações relativa e de arrastamento de *A*.

Resolução:

a) $\vec{v}_A$: barra *CD*:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = \omega\vec{k} \wedge (-a\vec{\jmath}) \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_A = \omega a\vec{\imath}}$$

b) $\vec{v}_{A,r}$ e $\vec{v}_{A,a}$:

<u>movimento relativo</u> (triângulo *OBE* parado):

O pino *A* percorre o rasgo *BE*. Portanto, a velocidade relativa tem a direção desse rasgo:

$$\vec{v}_{A,r} = v_1\vec{\imath} - v_1\vec{\jmath}$$

<u>movimento de arrastamento:</u>

Para a velocidade de arrastamento, supõe-se o pino *A* rigidamente ligado ao triângulo *OBE* (referencial móvel):

$$\vec{v}_{A,a} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{OBE} \wedge (A - O) = \omega_{OBE}\vec{k} \wedge a\vec{\imath} = \omega_{OBE}a\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{v}_{A,a} = v_2\vec{\jmath}$$

Mas:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A,r} + \vec{v}_{A,a} = v_1\vec{\imath} - v_1\vec{\jmath} + v_2\vec{\jmath}$$

Como $\vec{v}_A = \omega a\vec{\imath}$, temos:

$$\omega a = v_1 \Rightarrow v_1 = \omega a$$

e

$$-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1 = \omega a$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\vec{v}_{A,r} = \omega a\vec{\imath} - \omega a\vec{\jmath}}$$
$$\boldsymbol{\vec{v}_{A,a} = \omega a\vec{\jmath}}$$

c) ω_{OBE}:

O movimento de arrastamento corresponde ao pino *A* rigidamente ligado ao triângulo *OBE*:

$$\vec{v}_{A,a} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{OBE} \wedge (A - O) = \omega_{OBE} a\vec{j} = \omega a\vec{j} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_{OBE} = \omega}$$

d) $\vec{a}_A$:

barra CD: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - C)] = \dot{\omega}\vec{k} \wedge (-a\vec{j}) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (-a\vec{j})\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_A = \dot{\omega} a\vec{\imath} + \omega^2 a\vec{j}}$$

e) $\vec{a}_{A,c}$:

$$\vec{a}_{A,c} = 2\vec{\omega}_{OBE} \wedge \vec{v}_{A,r} = 2\omega\vec{k} \wedge (\omega a\vec{\imath} - \omega a\vec{j}) \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_{A,c} = 2\omega^2 a(\vec{j} + \vec{\imath})}$$

f) $\vec{a}_{A,r}$ e $\vec{a}_{A,a}$:

$$\vec{a}_{A,r} \parallel EB \Rightarrow \vec{a}_{A,r} = a_1\vec{\imath} - a_1\vec{j}$$

$$\vec{a}_{A,a} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_{OBE} \wedge (A - O) + \vec{\omega}_{OBE} \wedge [\vec{\omega}_{OBE} \wedge (A - O)] =$$

$$= \dot{\omega}_{OBE}\vec{k} \wedge (a\vec{\imath}) + \omega_{OBE}^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (a\vec{\imath})\right] = \dot{\omega}_{OBE} a\vec{j} - \omega^2 a\vec{\imath}$$

(obs.: e $\dot{\omega}_{OBE}$? Não pode derivar – tudo vale só para a posição mostrada: $\theta = 45°$)

Lei de composição de acelerações:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A,r} + \vec{a}_{A,a} + \vec{a}_{A,c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} a\vec{\imath} + \omega^2 a\vec{j} = a_1\vec{\imath} - a_1\vec{j} + \dot{\omega}_{OBE} a\vec{j} + \omega_{OBE}^2 a\vec{\imath} + 2\omega^2 a(\vec{j} + \vec{\imath}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} a = a_1 - \omega^2 a + 2\omega^2 a \Rightarrow a_1 = (\dot{\omega} - \omega^2)a$$

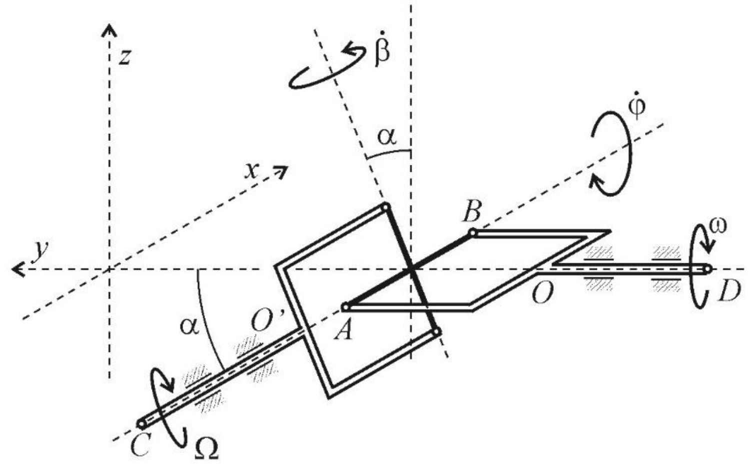
e

$$\omega^2 a = -a_1 + \dot{\omega}_{OBE} a + 2\omega^2 a \Rightarrow \dot{\omega}_{OBE} = \dot{\omega} - 2\omega^2$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\vec{a}_{A,r} = (\dot{\omega} - \omega^2)a(\vec{\imath} - \vec{j})}$$
$$\boldsymbol{\vec{a}_{A,a} = (\dot{\omega} - 2\omega^2)a\vec{j} - \omega^2 a\vec{\imath}}$$

Exemplo 3 (ver vídeos): A figura abaixo mostra uma junta cardan (ou junta universal), que é um dispositivo usado para a transmissão de rotação com eixos não alinhados. No caso da figura, o eixo *OD* gira com velocidade angular ω. Calcule a velocidade angular Ω do eixo *O'C* quando o garfo *AB* passa pela horizontal (plano *xy*).



Resolução:

Sendo o referencial o eixo *OD*: $\vec{\omega}_{cruzeta} = \vec{\omega}_{r,OD} + \vec{\omega}_{a,OD} = \dot{\varphi}\vec{\imath} + \omega\vec{\jmath}$

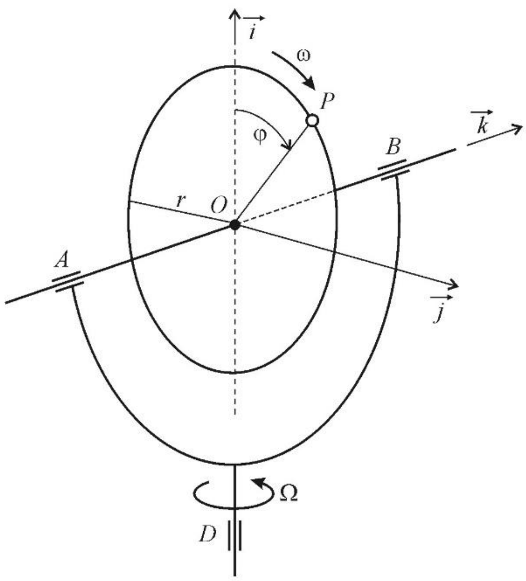
Sendo o referencial o eixo *OC*: $\vec{\omega}_{cruzeta} = \vec{\omega}_{r,OC} + \vec{\omega}_{a,OC} = \overrightarrow{(\dot{\beta})}\vec{\imath} + \vec{\Omega} =$

$$= \dot{\beta}\left(\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}\right) + \Omega\left(\cos\alpha\,\vec{\jmath} - \sin\alpha\,\vec{k}\right)$$

Igualando:

$$\begin{cases} \omega = \Omega\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha \\ \dot{\varphi} = 0 \\ -\Omega\sin\alpha + \dot{\beta}\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \Omega = \omega\cos\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\vec{\Omega} = \omega\cos\alpha\left(\cos\alpha\,\vec{\jmath} - \sin\alpha\,\vec{k}\right)}$$

Exemplo 4: Na figura, o sistema de coordenadas $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ é solidário ao arco *ABD*. Um disco de centro *O* e raio *r* gira em torno seu eixo geométrico *AB* com velocidade angular ω constante, permanecendo no plano $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Simultaneamente, o eixo *AB* executa um movimento de rotação uniforme com velocidade angular Ω ao redor da reta fixa *OD*, normal a *AB*. Determine a velocidade e a aceleração de um ponto *P* na periferia do disco, no movimento resultante, em função de *r*, *ω*, Ω e do ângulo φ que o raio *OP* faz com o eixo *DO*. Examinar os casos em que $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$.



Resolução:

Referencial móvel: garfo *ABD*

Temos:

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{O,r} + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$
$$= \omega\vec{k} \wedge r(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$
$$= \omega r(\cos\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{\imath})$$

$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{O,a} + \vec{\Omega} \wedge (P - O) = \Omega\vec{\imath} \wedge r(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}) = \Omega r\sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_P = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a} = -\omega r\sin\varphi\,\vec{\imath} + \omega r\cos\varphi\,\vec{\jmath} + \Omega r\sin\varphi\,\vec{k}}$$

$\boldsymbol{\varphi = 0\text{:}\ \vec{v}_P = \omega r\vec{\jmath}}$

$\boldsymbol{\varphi = \pi/2\text{:}\ \vec{v}_P = -\omega r\vec{\imath} + \Omega r\vec{k}}$

Acelerações:

$$\vec{a}_{P,r} = \vec{a}_{O,r} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] =$$
$$= \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge r(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})\right] = -\omega^2 r(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{a}_{P,a} = \vec{a}_{O,a} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (P - O) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (P - O)\right] =$$
$$= \Omega^2\vec{\imath} \wedge [\vec{\imath} \wedge r(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})] = -\Omega^2 r\sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_{P,c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{P,r} = 2\Omega\vec{\imath} \wedge \omega r(\cos\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{\imath}) = 2\Omega\omega r\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{a}_P = \vec{a}_{P,r} + \vec{a}_{P,a} + \vec{a}_{P,c} = -\omega^2 r\cos\varphi\,\vec{\imath} - (\omega^2 + \Omega^2) r\sin\varphi\,\vec{\jmath} + 2\Omega\omega r\cos\varphi\,\vec{k}}$$

$\boldsymbol{\varphi = 0: \vec{a}_P = -\omega^2 r\vec{\imath} + 2\Omega\omega r\vec{k}}$

$\boldsymbol{\varphi = \pi/2: \vec{v}_P = -(\omega^2 + \Omega^2) r\vec{\jmath}}$