Tópico 4 – Leis de conservação
2020

EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

FUNDAMENTOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS

INTRODUÇÃO

As soluções dos problemas de mecânicas dos sólidos devem satisfazer simultaneamente (tempo e posição) três condições:

- **equações de equilíbrio (ou de movimento)**
- **condições geométricas (ou compatibilidade entre deslocamentos e deformações)**
- **leis constitutivas de materiais (ou relações entre tensão e deformação)**

Condições iniciais e de contorno nos esforços e nos deslocamentos estão embutidas nos dois primeiros itens

INTRODUÇÃO

Condições estáticas (ou dinâmicas)

- **σ_{ij} – campo de tensões**
- **ρb_i – forças de campo**
- **F_i – forcas de superfície**

Equações de equilíbrio para uma análise estática:

nos pontos da superfície

$$t_i^{(n)} = n_j \sigma_{ji}$$

(três equações de equilíbrio)

nos pontos internos

$$\sum \text{forças} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$$

$$\sum \text{momentos} = 0$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

INTRODUÇÃO

2ª Lei de Newton – Principio Fundamental da Dinâmica

- u_i **– deslocamento**
- v_i **– velocidade**
- a_i **– aceleração**
- F_i **– força**
- m **– massa**

Quando aplicamos uma mesma força em dois corpos de massas diferentes observamos que elas não produzem aceleração igual. A 2ª lei de Newton diz que a Força é sempre diretamente proporcional ao produto da aceleração de um corpo pela sua massa, ou seja:

$$F_i = m a_i$$

CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A lei da conservação da quantidade de movimento Λ_i de elemento pequeno do corpo de volume ΔV de massa m deriva da 2ª lei de Newton, e determina que a taxa de variação da quantidade de movimento é igual à força total aplicada ao elemento.

$$\Lambda_i = \iiint_{\Delta V} \rho v_i dv$$

$$F_i = \frac{D}{Dt}\Lambda_i = \frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \rho v_i dV = \frac{D}{Dt}(m v_i) = m a_i$$

Para um meio continuo a força resultante consiste nas forças de campo que atuam no volume ΔV e das trações que atuam na superfície ΔS. Então, a lei da conservação da quantidade de movimento fica:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \rho v_i dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} dS$$

CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \rho v_i dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} dS$$

como: $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \rho v_i dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i dV + \iint_{\Delta S} \sigma_{ji} n_j dS$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\iint_{\Delta S} \sigma_{ji} n_j dS = \iiint_{\Delta V} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \rho v_i dV = \iiint_{\Delta V} \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV$$

CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Se estas condições são válidas para um qualquer volume *ΔV* então são válidas para todo o volume *V*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho a_i$$

ou

$$\nabla x \times \sigma + \rho \mathrm{b} = \rho \mathrm{a}$$

Do balanço de momento cinético resulta:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = \rho a_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = \rho a_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3$$

No caso de equilíbrio estático e desprezando o peso próprio

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Balanço da quantidade de movimento em termos de outros tensores de tensões e deformações:

Tensor de tensões de Kirchhof

$$\frac{1}{J}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$$

$$\frac{1}{J}\nabla.\tau + \rho_0 \mathrm{b} = \rho_0 \mathrm{a}$$

Tensor de tensões de Piola-Kircchof 1º

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$$

$$\nabla.\mathbf{P} + \rho_0 \mathrm{b} = \rho_0 \mathrm{a}$$

Tensor de tensões de Piola-Kircchof 2º

$$\frac{\partial (\Sigma_{ik} F_{jk})}{\partial x_j} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$$

$$\nabla.\left[\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{F}^T\right] + \rho_0 \mathrm{b} = \rho_0 \mathrm{a}$$

CONSERVAÇÃO DE MOMENTO CINÉTICO

A lei da conservação de momento cinética de elemento pequeno do corpo de volume *ΔV* de massa *m* deriva determina:

$$\mathrm{F}\times\mathrm{x} = \frac{D}{Dt}\left\{ m\left(\mathrm{x}\times\mathrm{F}\right)\right\} = \frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \mathrm{x}\times\rho\mathrm{v}dV$$

Para um meio continuo o momento cinético consiste nas forças de campo que atuam no volume *ΔV* e das trações que atuam na superfície *ΔS* vezes o braço *x*. Então, a lei da conservação de momento cinético fica:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \mathrm{x}\times\rho\mathrm{v}dV = \iiint_{\Delta V} \mathrm{x}\times\rho b dV + \iint_{\Delta S} \mathrm{x}\times\mathrm{t}^{(n)}dS$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j\rho v_k dV = \iiint_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j\rho b_k dV + \iint_{\Delta S} \in_{ijk}\ x_j t_k^{(n)} dS$$

CONSERVAÇÃO DE MOMENTO CINÉTICO

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho v_k dV = \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho b_k dV + \iint\limits_{\Delta S} \in_{ijk}\ x_j t_k^{(n)} dS$$

como: $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho v_k dV = \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho b_k dV + \underbrace{\iint\limits_{\Delta S} \in_{ijk}\ x_j \sigma_{mk} n_m dS}$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\iint\limits_{\Delta S} \in_{ijk}\ x_i \sigma_{rk} n_r dS = \iiint\limits_{\Delta V} \frac{\in_{ijk}\ x_i \sigma_{rk}}{\partial x_r} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho v_k dV = \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_j \sigma_{rk} \right) + x_j \rho b_k \right] dV$$

CONSERVAÇÃO DE MOMENTO CINÉTICO

$$\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho v_k dV = \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_j \sigma_{rk} \right) + x_j \rho b_k \right] dV$$

Considerando a conservação de momento cinético: $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho a_i = 0$

Como: $\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_j \sigma_{rk} \right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_r}\sigma_{rk} + x_j \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r}$ **e:** $\frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho v_k dV = \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ x_j \rho a_k dV$

$$\iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_r}\left(x_j \sigma_{rk} \right) + x_j \rho b_k - x_j \rho a_k \right] dV = \in_{ijk} \left[\cancel{\frac{\partial x_j}{\partial x_r}}\sigma_{rk} + x_j \cancel{\left(\frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r} + \rho b_k - \rho a_k \right)} \right]$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_r} = \delta_{ir} \qquad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho a_i = 0$$

$$= \iiint\limits_{\Delta V} \in_{ijk}\ \delta_{jr}\sigma_{rk} dV = 0$$

CONSERVAÇÃO DE MOMENTO CINÉTICO

Se a conservação de momento cinético é válida para um qualquer volume *ΔV* então é válidas para todo o volume *V*

$$\iiint_{\Delta V} \in_{ijk} \delta_{jr} \sigma_{rk} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \in_{ijk} \delta_{jr} \sigma_{rk} = 0$$

$$\begin{aligned} &\in_{ijk} \delta_{jr} \sigma_{rk} = \in_{ijk} \sigma_{jk} = \\ &= \in_{imn} \in_{ijk} \sigma_{jk} = \\ &= \left(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{mk} \delta_{nj} \right) \sigma_{jk} = \\ &= \sigma_{mn} - \sigma_{nm} = 0 \end{aligned}$$

Do balanço de momento cinético resulta:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \textbf{ou} \quad \sigma = \sigma^T$$

CONSERVAÇÃO DE MASSA

$$\frac{dV}{dV_0} = \det(F) = J$$

Se o material é incompressível: $\det(F) = 1$

Para pequenas deformações:

$$\det(F) \approx 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = 1 + \varepsilon_{ii}$$

Dilatação: $\Delta = \varepsilon_{ii} = tr(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

CONSERVAÇÃO DE MASSA

Forma Lagrangeana

A massa de um volume ΔV material permanece constante durante a deformação, então:

Considerando: $$\rho_0 = \lim_{\Delta V_0 \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V_0}$$ **e** $$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = \det(F)$$

$$\det(F) \neq 0$$

Se $\det(F) = 0$ **então:** $\Delta V_0 = \infty$ **e** $\Delta V = 0$

- **Para a deformação ser fisicamente admissível** $\det(F) > 0$

CONSERVAÇÃO DE MASSA

Forma Euleriana

Considere-se elemento pequeno do corpo *ΔV* com superfície *ΔS* fixa no espaço relativamente a referencial fixo. A conservação de massa pode ser expressa em termos do equilíbrio da massa de entra e sai pela superfície *ΔS*.

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\iint_{\Delta S} \rho \mathrm{v} \cdot \mathrm{n}\, dS$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$\iint_{\Delta S} \rho \mathrm{v} \cdot \mathrm{n}\, dS = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \left(\rho \mathrm{v} \right) dV = 0$$

$$\iiint_{\Delta V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathrm{v} \right) \right] dV = 0$$

CONSERVAÇÃO DE MASSA

Forma Euleriana

Como ΔV é uma região arbitrária, isto é, válido para qualquer volume. Então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \times (\rho \mathrm{v}) = 0$$ **ou** $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{v}\,\nabla \rho + \rho\,\nabla \times \mathrm{v} = 0$$ **ou** $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Derivada material: $$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Se o material é incompressível, então: $$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ρ é constante em cada partícula

Então:

$$\nabla \times v = 0$$ **ou** $$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Logo: $D_{ii} = 0$ **ou** $tr(\mathbf{D}) = 0$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

A energia cinética ***K*** elemento pequeno do corpo (de volume ***ΔV*** que contem o ponto ***P***) é definida por:

$$K = \frac{1}{2}\iiint_{\Delta V} \rho v_i v_i dV$$

A energia de deformação ***E*** acumulada devido à aplicação de forças externas em um elemento pequeno do corpo (de volume ***ΔV*** que contem o ponto ***P***) em termos da densidade de energia ***e*** é definida por:

$$E = \iiint_{\Delta V} \rho e dV$$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

De acordo com a primeira lei da termodinâmica para haver conservação da energia (desconsiderando as trocas de calor) num elemento pequeno do corpo (de volume *ΔV* que contem o ponto *P*) a taxa de trabalho é igual à taxa de energia interna:

$$\frac{D}{Dt}\left(K+E\right)=\dot{W}$$

Onde a taxa de trabalho é definida:

$$\dot{W}=\iint_{\Delta S} t_i^{(n)} v_i dS+\iiint_{\Delta V}\rho b_i v_i dV=\iint_{\Delta S} n_j \sigma_{ij} v_i dS+\iiint_{\Delta V}\rho b_i v_i dV$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\iint_{\Delta S} n_j \sigma_{ij} v_i dS=\iiint_{\Delta V}\left(\sigma_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i\right) dV$$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

$$\dot{W} = \iiint_{\Delta V} \left(\underbrace{\sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right)} v_i \right) dV$$

Considerando a conservação de momento cinético $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho a_i$$

Considerando a conservação de quantidade de movimento

Considerando a taxa de estiramento: $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

$$\dot{W} = \iiint_{\Delta V} \left(\boxed{\sigma_{ij} D_{ij}} + \boxed{\rho a_i v_i} \right) dV$$

Energia potencial de deformação elástica $\frac{DE}{Dt}$ $\frac{DK}{Dt}$ **Energia cinética**

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

$$\dot{W} = \iiint_{\Delta V} \left(\sigma_{ji} D_{ij} + \rho a_i v_i \right) dV$$

$$\boxed{\iiint_{\Delta V} \rho a_i v_i dV = \iiint_{\Delta V} \rho \frac{Dv_i}{Dt} v_i dV = \iiint_{\Delta V} \rho \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(v_i v_i \right) dV = \frac{D}{Dt} \iiint_{\Delta V} \rho \frac{1}{2} v_i v_i dV}$$

$$\dot{W} = \frac{D}{Dt} \left(K + E \right) = \frac{D}{Dt} \underbrace{\iiint_{\Delta V} \rho \frac{1}{2} v_i v_i dV}_{K} + \frac{D}{Dt} \underbrace{\iiint_{\Delta V} \rho e dV}_{E} =$$

$$= \iiint_{\Delta V} \left(\sigma_{ji} D_{ij} + \rho a_i v_i \right) dV = \iiint_{\Delta V} \sigma_{ji} D_{ij} dV + \iiint_{\Delta V} \rho a_i v_i dV =$$

$$= \iiint_{\Delta V} \sigma_{ji} D_{ij} dV + \boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_{\Delta V} \rho \frac{1}{2} v_i v_i dV}$$

$$\frac{D}{Dt} \rho e = \sigma_{ji} D_{ij}$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Delta V} \rho e dV = \iiint_{\Delta V} \sigma_{ji} D_{ij} dV$$

PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Forma diferente de escrever a equação para o balanço para a quantidade de movimento

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho a_i$$

Define-se um campo de velocidade virtual admissível cinematicamente δv(x)=0 (i.e continuo e diferenciável) em um elemento pequeno do corpo de volume *ΔV* que contem o ponto *P*. δv representa uma perturbação na velocidade mantendo as condições de fronteira.

$$\delta L_{ij} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}$$

$$\delta D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right)$$

PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Equação do trabalho virtual:

$$\underbrace{\iiint\limits_{\Delta V}\left(\sigma_{ij}\delta D_{ij}+\rho a_i\delta v_i\right)dV}_{\delta \dot{W}_{\text{int}}}=\underbrace{\iiint\limits_{\Delta V}\rho b_i\delta v_i dV+\iint\limits_{\Delta S}t_i^{(n)}\delta v_i dS}_{\delta \dot{W}_{\text{ext}}}$$

Taxa de trabalho virtual devido às forças internas

Taxa de trabalho virtual devido às forças externas

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\iint\limits_{\Delta S}n_j\sigma_{ij}\delta v_i dS=\iiint\limits_{\Delta V}\left(\sigma_{ji}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta v_i\right)dV$$

$$\iiint\limits_{\Delta V}\left(\sigma_{ij}\delta D_{ij}+\rho a_i\delta v_i\right)dV=\iiint\limits_{\Delta V}\rho b_i\delta v_i dV+\iiint\limits_{\Delta V}\left(\sigma_{ji}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta v_i\right)dV$$

PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Então:

$$\sigma_{ij}\delta D_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ji}\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right) = \sigma_{ji}\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\delta v_i\right) - \boxed{\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta v_i} \qquad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta v_i = \rho a_i \delta v_i - \rho b_i \delta v_i$$

$$\sigma_{ij}\delta D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\delta v_i\right) - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta v_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\delta v_i\right) - \rho a_i \delta v_i + \rho b_i \delta v_i$$

$$\sigma_{ij}\delta D_{ij} + \rho a_i \delta v_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji}\delta v_i\right) + \rho b_i \delta v_i$$

PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Principio dos trabalhos virtuais em termos de outros tensores de tensões e deformações:

$$\iiint_{\Delta V}\left(\sigma_{ij}\delta D_{ij}+\rho a_i\delta v_i\right)dV=\iiint_{\Delta V}\rho b_i\delta v_i dV+\iint_{\Delta S}t_i^{(n)}\delta v_i dS$$

Relembrando:

Gradiente de deformação

$$F_{ij}=\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

Taxa virtual do gradiente de deformação

$$\delta\dot{F}_{ij}=\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}F_{kj}=\frac{\partial\delta v_i}{\partial X_j}$$

Taxa virtual do tensor de deformação de Lagrange

$$\delta\dot{E}_{ij}=\frac{1}{2}\left(F_{ki}\delta\dot{F}_{kj}+\delta\dot{F}_{ki}F_{kj}\right)$$

Em termos do tensor de tensões de Kirchhof

$$\iiint_{\Delta V_0}\left(\tau_{ij}\delta D_{ij}+\rho_0 a_i\delta v_i\right)dV_0=\iiint_{\Delta V_0}\rho b_i\delta v_i dV_0+\iint_{\Delta S_0}t_i^{(n)}\delta v_i dS_0$$

Em termos do tensor de tensões de Piola-Kircchof 1º

$$\iiint_{\Delta V_0}\left(P_{ij}\delta\dot{F}_{ij}+\rho_0 a_i\delta v_i\right)dV_0=\iiint_{\Delta V_0}\rho_0 b_i\delta v_i dV_0+\iint_{\Delta S_0}t_i^{(n)}\delta v_i dS_0$$

Em termos do tensor de tensões de Piola-Kircchof 2º

$$\iiint_{\Delta V_0}\left(\Sigma_{ij}\delta\dot{E}_{ij}+\rho_0 a_i\delta v_i\right)dV_0=\iiint_{\Delta V_0}\rho_0 b_i\delta v_i dV_0+\iint_{\Delta S_0}t_i^{(n)}\delta v_i dS_0$$

PRINCIPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Principio dos trabalhos virtuais para deformações infinitesimais:

$$\iiint_{\Delta V} \left(\sigma_{ij}\delta D_{ij} + \rho a_i \delta v_i \right) dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i \delta v_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} \delta v_i dS$$

Relembrando: **Taxa virtual do tensor de deformação de infinitesimal**

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial X_i} \right)$$

Fica:

$$\iiint_{\Delta V} \left(\sigma_{ij}\delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho a_i \delta v_i \right) dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i \delta v_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} \delta v_i dS$$

Não há diferença entre ΔV e ΔV_0 ou entre ΔS e ΔS_0

Esta expressão pode ser usada para uma análise estática considerando a_i=0. Então, o estado de tensão satisfaz as condições de equilíbrio ($\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$) e as condições de fronteira ($t_i^{(n)} = n_j \sigma_{ji}$)

$$\delta W_{\text{int}} \quad \iiint_{\Delta V} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \iiint_{\Delta V} \rho b_i \delta u_i dV + \iint_{\Delta S} t_i^{(n)} \delta u_i dS \quad \delta W_{\text{ext}}$$