P1 – Eletromagnetismo 1

Formulário

$$\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \oint d\vec{S}\cdot\vec{F} \quad , \quad \int d\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = \oint d\vec{l}\cdot\vec{F} \quad , \quad \rho_E = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi \quad \leftrightarrow \quad \phi(\vec{r}) = -\int^{\vec{r}} d\vec{l}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Eletrostática em meios materiais:

$$\vec{D} \;=\; \epsilon_0\,\vec{E}+\vec{P} \;=\; \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} \;=\; \epsilon\,\vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad , \quad \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad , \quad \sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

$$\text{Cond. contorno}: \quad \Delta\vec{D}_\perp = \sigma \quad , \quad \Delta\vec{E}_{||} = 0$$

Coordenadas esféricas:

$$dV = r^2\,dr\,\text{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi = -r^2\,dr\,d\mu\,d\varphi \quad (\mu = \cos\theta)$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial(\text{sen}\theta\,v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Soluções da Equação de Laplace em coordenadas esféricas (com simetria axial):

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\,r^\ell + B_\ell\,r^{-\ell-1}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Expansão multipolar:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\mu = \hat{r}\cdot\hat{r}\,')$$

$$\text{Potencial de anel em } (r',\theta'), \text{ com carga } dq: \quad d\phi(r,\theta) = \frac{dq(r',\theta')}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta')P_\ell(\cos\theta)$$

$$\ell = 1: \quad \phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\vec{p} \quad , \quad \vec{p} = \int dV'\,\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')$$

$$\ell = 2 : \quad \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\sum_{i,j=1}^{3} \hat{r}_i\,\hat{r}_j\,Q_{ij} \quad , \quad Q_{ij} = \int dV'\,\frac{1}{2}\left(3\,r'_i\,r'_j - r'^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec{r}\,')$$

Polinômios de Legendre, $P_\ell(\mu)$ (usando $\mu = \cos\theta$):

$$P_0(\mu) = 1 \quad , \quad P_1(\mu) = \mu \quad , \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \quad , \quad \ldots$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu\, P_\ell(\mu)\, P_{\ell'}(\mu) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} \qquad , \qquad P_\ell(1) = 1 \qquad , \qquad P_\ell(-\mu) = (-1)^\ell P_\ell(\mu)$$

Identidade útil:

$$Q_\ell \equiv \int_0^1 d\mu\, P_\ell(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \ell = 1 \\ (-1)^{(\ell-1)/2}\,\frac{2}{\ell+1}\,\frac{(\ell-2)(\ell-4)\ldots 1}{(\ell-1)(\ell-3)\ldots 2} & \ell = 3, 5, 7, \ldots \\ 0 & \ell = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Q1 – Os elétrons em um determinado átomo se distribuem de tal forma que a carga total contida em um raio r em torno desse átomo é dada por $Q(r) = \sigma_0\, r^2\, e^{-r/R}$, onde σ_0 e R são constantes características desse átomo. Encontre:

(a) **[0.5]** O potencial elétrico em todo o espaço.

(b) **[0.5]** O campo elétrico em todo o espaço.

(c) **[1.0]** A energia total do campo elétrico. [*Dica:* $\int dx\, x^2\, e^{-x} = -(2 + 2x + x^2)e^{-x}$]

Q2 – Dois planos infinitos em $z = \pm h/2$ têm densidades superficiais de cargas dadas por $\sigma(x, y, z = +h/2) = \sigma_0 \sin[kx]$, e $\sigma(x, y, z = -h/2) = \sigma_0 \cos[kx]$. Fora dos planos temos o vácuo. Você deve calcular o potencial e o campo elétrico no espaço entre esses dois planos.

(a) **[1.0]** Quais são as condições de contorno relevantes neste problema? Expresse essas condições tanto na região logo acima do plano de baixo ($z = -h/2$) quanto na região logo abaixo do plano de cima ($z = h/2$).

(b) **[1.0]** Utilizando o método da separação de variáveis, tente soluções particulares da forma $\phi(x, z) \to X(x)Z(z)$. Encontre os pares de funções X e Z que satisfazem tanto a Equação de Laplace quanto as condições de contorno na região $z \geq 0$. Calcule os coeficientes dessa expansão, de tal forma que a solução satisfaça as condições de contorno. [Dica: você deve encontrar quatro pares de funções; caso faça escolhas "espertas", talvez sejam dois pares.]

(c) **[0.5]** Calcule todas as componentes do campo elétrico. Agora, estenda o resultado para a região entre os planos para as regiões $z > h/2$ e $z < -h/2$, mas *sem fazer contas* (só utilizando argumentos de simetria e de convergência dadas as condições de contorno).

Q3 – Uma esfera sólida de raio R é seccionada ao meio, e cargas são distribuída uniformemente no volume dessas semi-esferas, de tal forma que a semi-esfera superior possui uma densidade de carga por unidade de volume ρ_0, e a semi-esfera inferior, uma densidade oposta $(-\rho_0)$. A semi-esfera superior possui, portanto, uma carga total $Q = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$, enquanto a semi-esfera inferior possui a carga oposta $(-Q)$, de tal forma que a carga líquida total da esfera é nula.

(a) **[1.0]** Calcule o potencial na região *interior* da esfera ($r < R$).

(b) **[1.0]** Calcule o potencial na região *exterior* da esfera ($r > R$).

(c) **[1.0]** Qual é o dipolo elétrico dessa configuração? Expresse o resultado em termos da carga Q e do raio R. Esse dipolo é menor ou maior do que o dipolo elétrico de duas cargas pontuais $+Q$ e $-Q$ separadas por uma distância R?

Dica 1: Neste problema, tome muito cuidado com a determinação de quem faz o papel de $r_<$, e quem faz o papel de $r_>$, especialmente se eles aparecem em uma integral.
Dica 2: Utilize o formulário!

Q4 – Considere uma esfera dielétrica (de constante dielétrica ϵ) de raio a, e com vácuo ao seu redor ($r > a$). Na origem, $r = 0$, é inserido um dipolo elétrico $\vec{p} = p_0\,\hat{z}$ "ideal".

(a) **[1.0]** Escreva as condições de contorno na superfície da esfera ($r = a$). Obtenha as expressões para essas condições de contorno em termos do potencial elétrico $\phi(r, \theta)$.

(b) **[1.0]** Examine a solução geral, em coordenadas esféricas, para o potencial elétrico dentro e fora da esfera dielétrica. Quais termos são admissíveis para as expansões da solução dentro ($\phi_<$) e fora ($\phi_>$) da esfera, tomando os limites $r \to 0$ e $r \to \infty$? Em particular, qual deve ser o potencial no limite $r \to 0$?

(c) **[0.5]** Utilizando as condições de contorno obtidas no item (a), e as expansões em série para $\phi_<$ e $\phi_>$ obtidas no item (b), encontre a expressão para o potencial em todo o espaço.