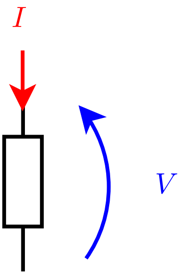
PSI3262 – FCEDA – Aula 15 – Resposta em Frequência

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

1.1 Corrente Contínua - CC

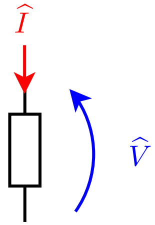


- LEI DE OHM

$$\frac{V}{I} = R$$

Resistência CC $= R_{\mathrm{CC}}$

1.2 Corrente Alternada - CA



- Equivalente CA da LEI DE OHM

$$\frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} = Z = R + jX$$

  - Z: impedância do dispositivo
  - R: componente resistivo ou dissipativo (R_{CA})
  - X: componente reativo ou reatância
  - R e X são funções da frequência

Exemplo: Resistor em série com um indutor ideal,
$Z(j\omega) = R + j\omega L$

1.3 Recíprocas

Admitância

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \underbrace{\frac{R}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2}}_{G} + j\,\underbrace{\frac{-X}{R^2 + X^2}}_{B}$$

G: componente condutivo

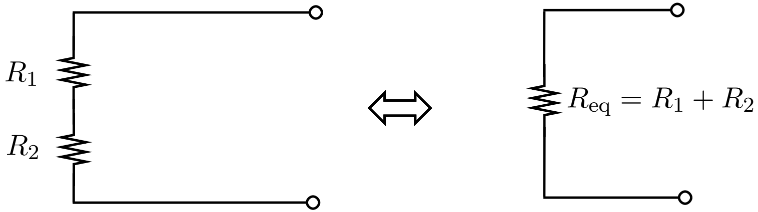
B: susceptância

CC	Resistência (R_{CC})	Condutância (G_{CC})
CA	Impedância ($Z(j\omega)$)	Admitância ($Y(j\omega)$)

1.4 Associação de impedâncias e admitâncias

Antes de estudarmos a associação de impedâncias e admitâncias, vamos recordar os resultados da associação de resistores.

Resistores em série

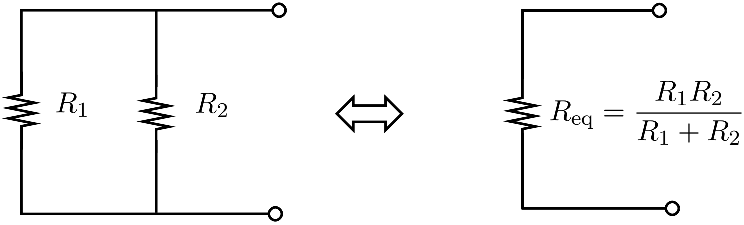


Generalizado para n resistores em série

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

1.4 Associação de impedâncias e admitâncias

Resistores em paralelo



Generalizado para n resistores em paralelo

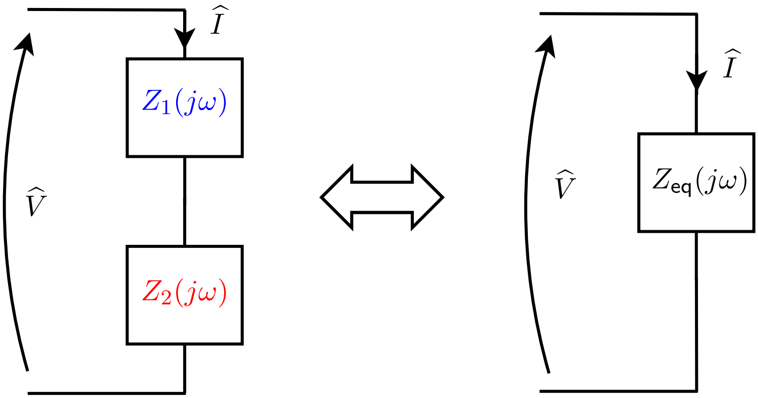
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

que em termos de condutância fica

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

1.4 Associação de impedâncias e admitâncias

Impedâncias em série



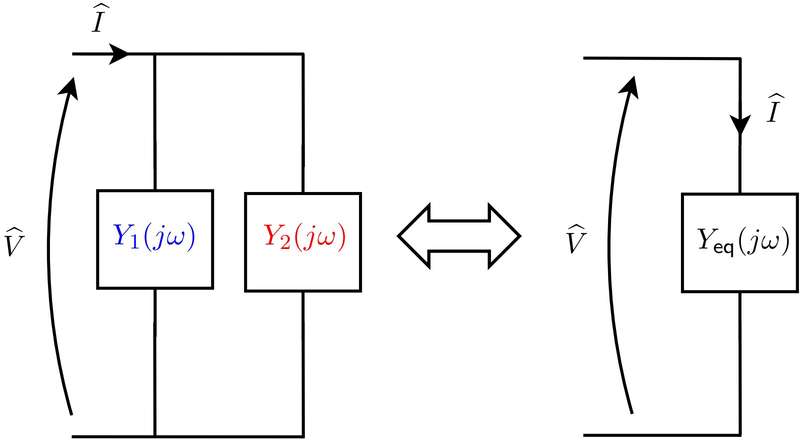
$$Z_{\text{eq}}(j\omega) = Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)$$

Para n impedâncias em série:

$$Z_{\text{eq}}(j\omega) = Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega) + \cdots + Z_n(j\omega)$$

1.4 Associação de impedâncias e admitâncias

Admitâncias em paralelo



$$Y_{\text{eq}}(j\omega) = Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega)$$

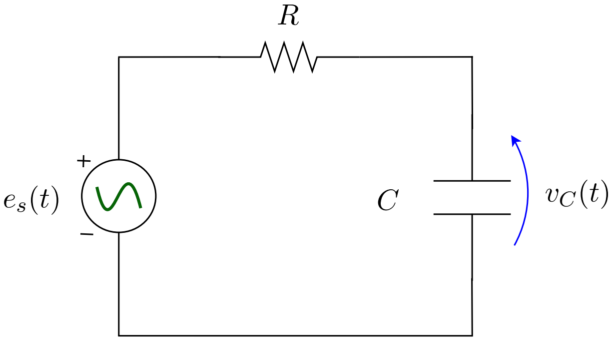
Para n admitâncias em paralelo:

$$Y_{\text{eq}}(j\omega) = Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + \cdots + Y_n(j\omega)$$

2. Resposta em frequência

- Se um circuito for alimentado por um sinal senoidal, sua saída também será senoidal de mesma frequência
- A frequência da saída é a mesma da fonte, mas sua amplitude e fase podem ser alteradas
- O efeito que um circuito tem sobre a amplitude e fase do sinal de entrada para cada frequência é chamado de resposta em frequência
- Resposta em frequência é definida pela razão entre o fasor de saída e o fasor de entrada em função de ω

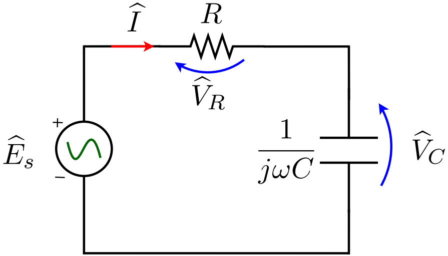
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas



- Entrada: $e_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

Usando fasores e relações fasoriais



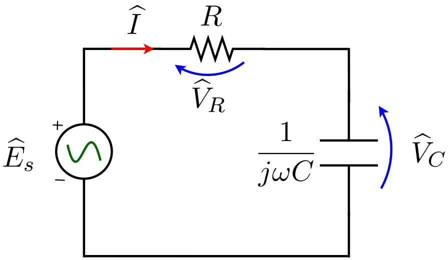
A impedância equivalente da associação série do resistor com o capacitor é

$$Z_{\text{eq}}(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}$$

O fasor de corrente é

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_s}{Z_{\text{eq}}(j\omega)} = \frac{\widehat{E}_s}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas



Usando a relação fasorial do capacitor, chega-se ao fasor da tensão no capacitor, ou seja,

$$\widehat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\widehat{I} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}\widehat{E}_s$$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

$$\widehat{V}_C = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_C}{\widehat{E}_s} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PB}}(j\omega) \quad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

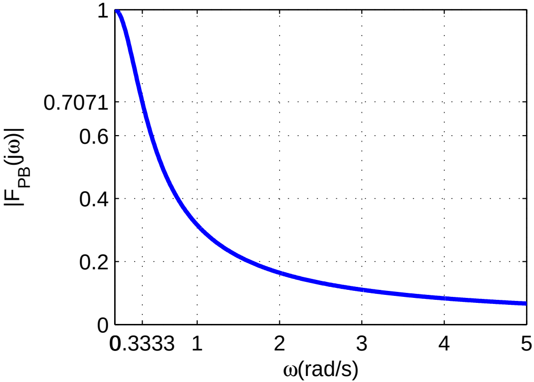
$$\boxed{|F_{\mathrm{PB}}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PB}}(\omega) = -\arctan(\omega RC)}$$

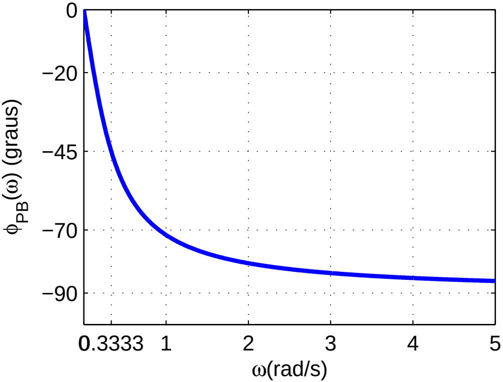
2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Módulo



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1$ F)

Fase



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

Se a resposta em frequência for conhecida, é possível calcular a saída do circuito para uma dada entrada senoidal.

Por exemplo, suponha que a entrada do circuito RC seja dada por

$$e_s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \text{cujo fasor é} \quad \widehat{E}_s = A_s \mathrm{e}^{j\phi_s}.$$

Na frequência ω_s, a resposta em frequência é

$$F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{E}_s} = |F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s)| \mathrm{e}^{j\phi_{\mathrm{PB}}(\omega_s)}$$

Assim,

$$\widehat{V}_C = \widehat{E}_s \, F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s) = A_s \mathrm{e}^{j\phi_s} |F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s)| \mathrm{e}^{j\phi_{\mathrm{PB}}(\omega_s)}$$

$$\boxed{\widehat{V}_C = A_s |F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s)| \mathrm{e}^{j[\phi_s + \phi_{\mathrm{PB}}(\omega_s)]}}$$

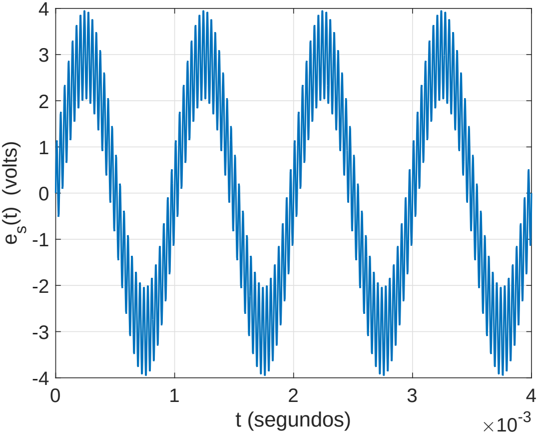
Portanto,

$$\boxed{v_C(t) = A_s |F_{\mathrm{PB}}(j\omega_s)| \cos(\omega_s t + \phi_s + \phi_{\mathrm{PB}}(\omega_s))}$$

2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$)

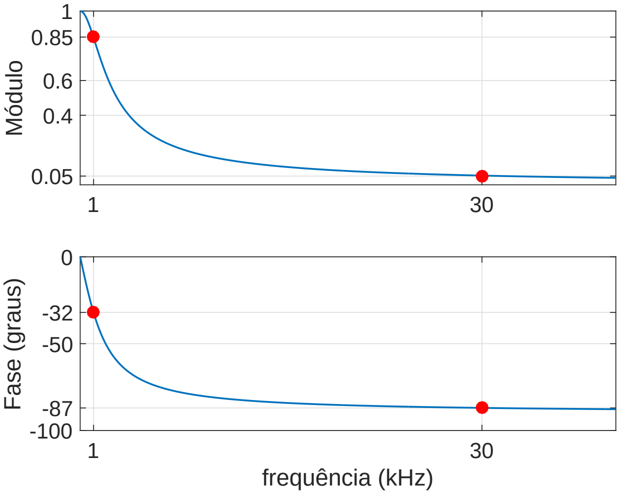
Vamos supor que temos a seguinte soma de senoides na entrada:

$$e_s(t) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi\,1000\,\mathrm{t}) + \mathrm{sen}(2\pi\,30000\,\mathrm{t}),\ \ (\mathrm{V},\mathrm{s})$$



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$)

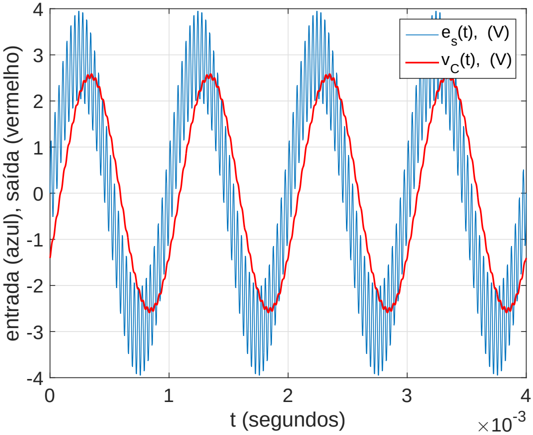
Os gráficos do módulo e fase da resposta em frequência são



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$)

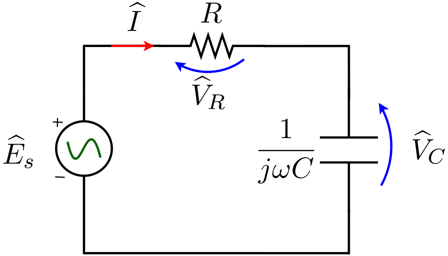
A tensão de saída $v_C(t)$ é dada por:

$$v_C(t) = \underbrace{2{,}55}_{3\times 0{,}85}\ \mathrm{sen}(2\pi\, 1000\, \mathrm{t} - 32^{\mathrm{o}}) + \underbrace{0{,}05}_{1\times 0{,}05}\ \mathrm{sen}(2\pi\, 30000\, \mathrm{t} - 87^{\mathrm{o}}),\ \ (\mathrm{V}, \mathrm{s})$$



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

Vamos agora considerar a tensão do resistor como saída.



Novamente, temos o seguinte fasor de corrente

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_s}{Z_{\text{eq}}(j\omega)} = \frac{\widehat{E}_s}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}.$$

Usando a relação fasorial do resistor, chega-se a

$$\widehat{V}_R = R\widehat{I} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}\widehat{E}_s$$

2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PA}}(j\omega) \quad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

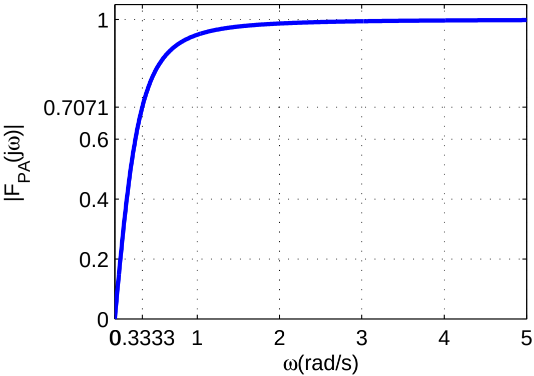
$$\boxed{|F_{\mathrm{PA}}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PA}}(\omega) = 90^{\mathrm{o}} - \arctan(\omega RC)}$$

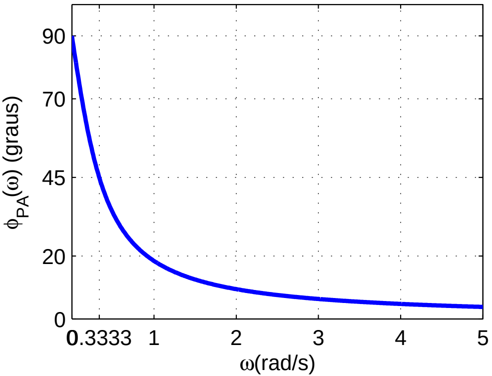
2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1$ F)

Módulo



2.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

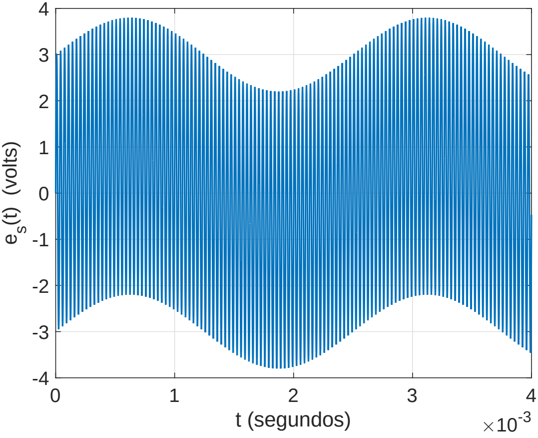
Fase



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-altas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$)

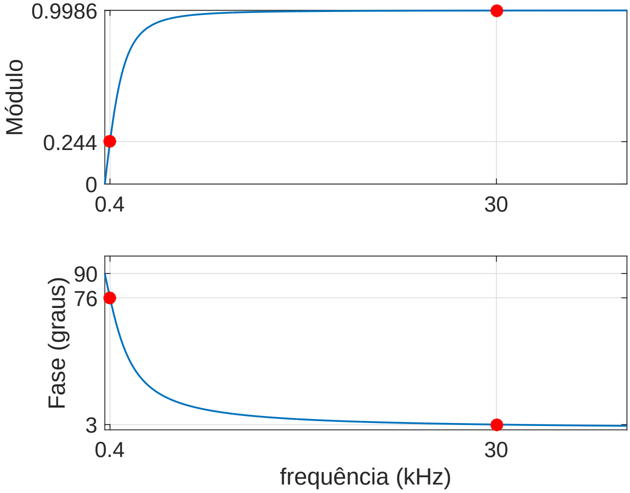
Vamos supor que temos a seguinte soma de senoides na entrada:

$$e_s(t) = 0{,}8\,\text{sen}(2\pi\,400\,\text{t}) + 3\,\text{sen}(2\pi\,30000\,\text{t}),\ \ (\text{V}, \text{s})$$



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-altas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$)

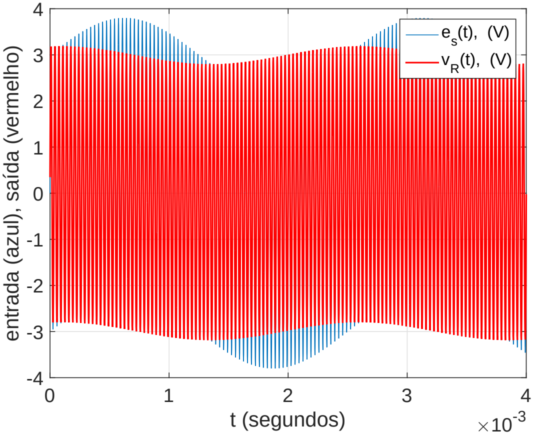
Os gráficos do módulo e fase da resposta em frequência são



2.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-altas ($R = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$)

A tensão de saída $v_R(t)$ é dada por:

$$v_R(t) = \underbrace{0{,}1952}_{0{,}8\times 0{,}244}\ \text{sen}(2\pi\, 400\, \text{t} + 76^{\text{o}}) + \underbrace{2{,}9958}_{3\times 0{,}9986}\ \text{sen}(2\pi\, 30000\, \text{t} + 3^{\text{o}}),\ \ (\text{V,s})$$



2.3 Frequência de corte

- Frequência de corte é a frequência abaixo da qual (ou acima da qual) a potência na saída do circuito é reduzida à metade da potência na faixa de passagem
- Frequência na qual o ganho da resposta em frequência se reduz a

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|F(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- No Exemplo 1

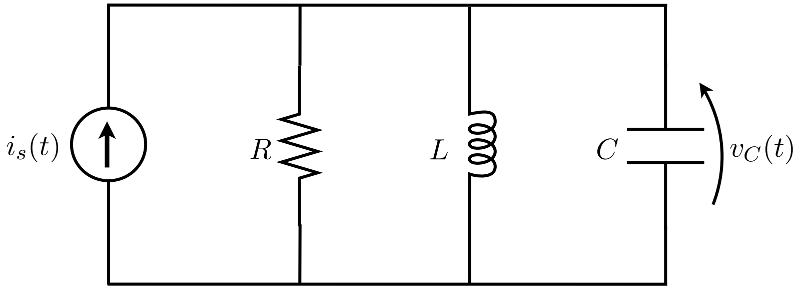
$$|F_{PB}(j\omega)|_{\max} = |F_{PB}(j0)| = 1$$

Qual a frequência ω_c na qual $|F_{PB}(j\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- É possível mostrar que no Exemplo 2 também vale $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (Verifique!)

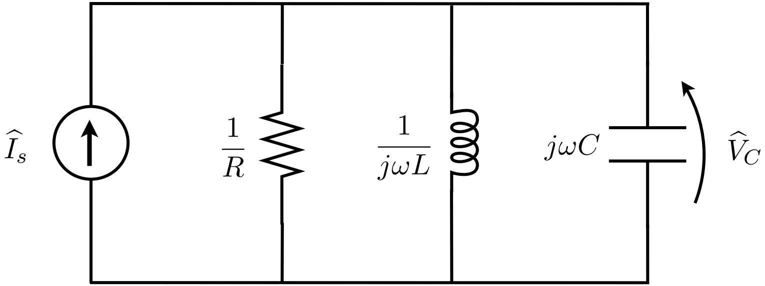
2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa



- Entrada: $i_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

Usando fasores e admitâncias



A admitância equivalente é

$$\boxed{\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

A admitância do circuito é

$$\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

e a impedância é dada por [em Ω no sistema internacional de unidades]

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_s} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}}$$

Módulo

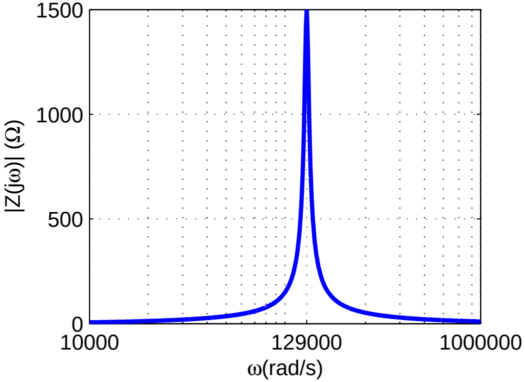
$$\boxed{|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi(\omega) = -\arctan\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]}$$

2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 600\ \mu$H)

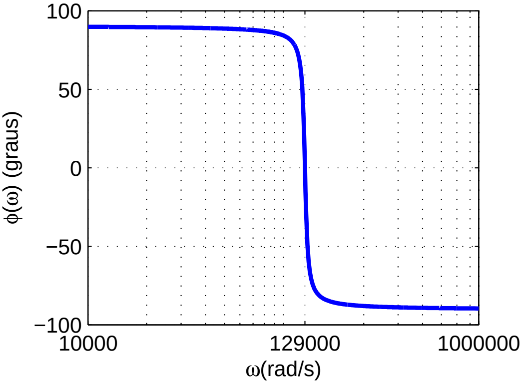
Módulo



O máximo do módulo ocorre para $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 129100$ rad/s e nessa frequência o circuito se reduz ao resistor $R = 1500\ \Omega$.

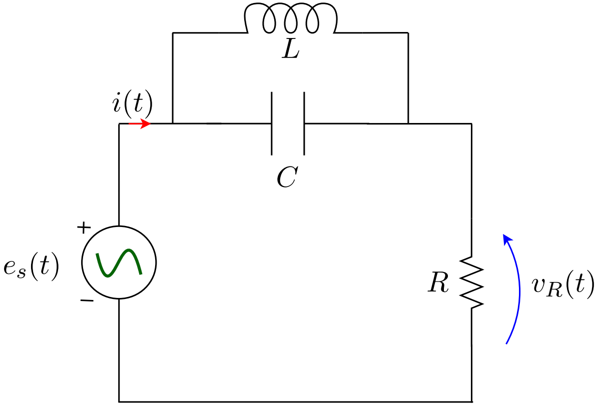
2.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 600\ \mu$H)

Fase



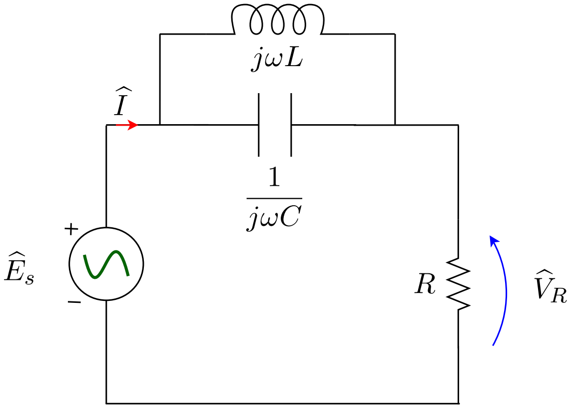
Note que na frequência $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 129100$, a fase é nula (não há defasagem entre tensão e corrente quando o circuito se reduz a R).

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição



- Entrada: $e_s(t)$
- Saída: $v_R(t)$

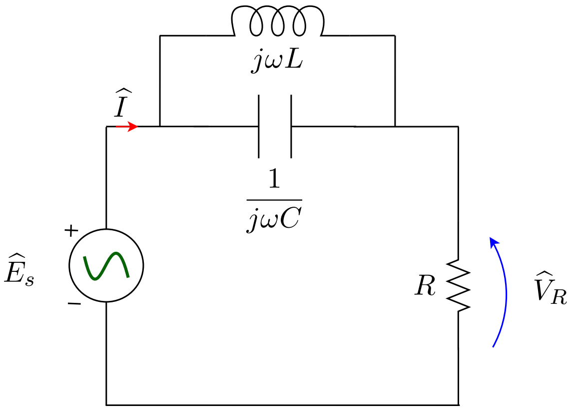
2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição



A admitância da associação paralela do indutor e capacitor é

$$Y_{LC}(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição



A impedância equivalente do circuito é

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{Y_{LC}(j\omega)} = R + \frac{1}{j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição

A impedância equivalente do circuito é

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{Y_{LC}(j\omega)} = R + \frac{1}{j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}$$

O fasor da corrente é dado por

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_s}{Z(j\omega)} = \frac{1}{R + \dfrac{1}{j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}}\widehat{E}_s$$

O fasor da tensão do resistor (saída) é dado por

$$\widehat{V}_R = R\widehat{I} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}}\widehat{E}_s$$

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição

Após algumas manipulações, chega-se à expressão da resposta em frequência $F(j\omega)$, i.e.,

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + j\omega LG}}$$

em que $G = 1/R$

Módulo

$$\boxed{|F(j\omega)| = \frac{|1-\omega^2 LC|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 G^2}}}$$

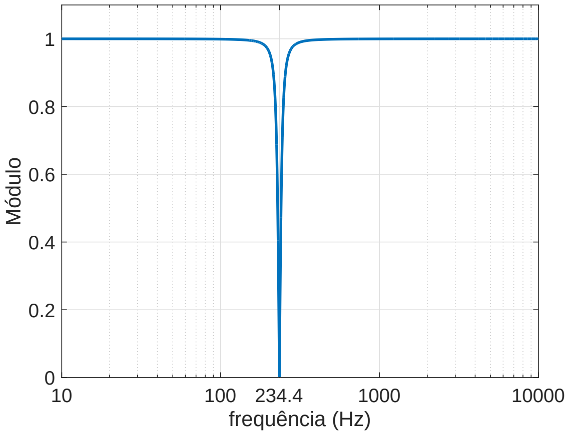
Fase

$$\boxed{\phi(\omega) = -\mathrm{atan2}(\omega LG,\ 1-\omega^2 LC)}$$

Note que: $F(j0) = 1,\ \lim_{\omega\to\infty} F(j\omega) = 1$ e $F\left(j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0$

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição ($R = 50\ \Omega$, $C = 159\ \mu\text{F}$, $L = 2{,}9\ \text{mH}$)

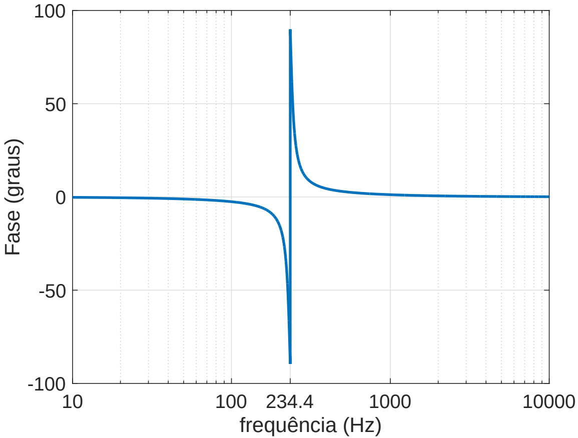
Módulo



O módulo é zero para $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}4727$ krad/s, ou seja, $f_r = 234{,}38$ Hz.

2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição ($R = 50\ \Omega$, $C = 159\ \mu\mathrm{F}$, $L = 2{,}9\ \mathrm{mH}$)

Fase



2.5 Exemplo 4: Filtro de rejeição ($R = 50\ \Omega$, $C = 159\ \mu\text{F}$, $L = 2{,}9\ \text{mH}$)

Determine a expressão da saída $v_R(t)$ para entrada

$$e_s(t) = 5\ \cos(2\pi\,200\,t + 45^{\text{o}}) + 10\ \cos(2\pi\,235\,t), \quad (\text{V, s})$$

Note que

$$|F(j2\pi\,200)| = 0{,}9659 \quad e \quad \phi(2\pi\,200) = -15^{\text{o}}$$

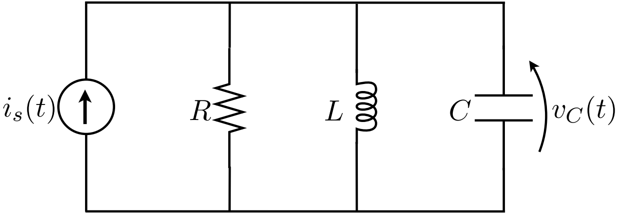
e

$$|F(j2\pi\,235)| = 0{,}0616 \quad e \quad \phi(2\pi\,200) = 86^{\text{o}}.$$

Assim, a expressão da saída em (V,s) é

$$v_R(t) = \underbrace{4{,}83}_{5\times 0{,}9659}\ \cos(2\pi\,200\,t + \underbrace{30^{\text{o}}}_{45^{\text{o}}-15^{\text{o}}}) + \underbrace{0{,}616}_{10\times 0{,}0616}\ \cos(2\pi\,235\,t + 86^{\text{o}})$$

3. RLC paralelo - Ressonância



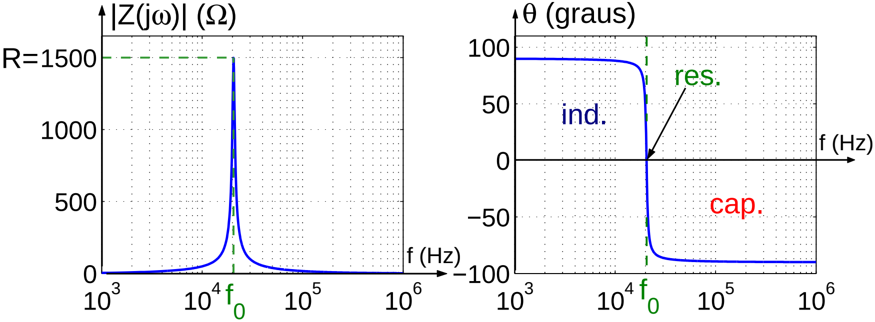
Frequência de ressonância

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- Fase da impedância é nula
- Circuito é puramente resistivo
- Módulo da impedância é máximo (módulo da tensão é máximo) ou Módulo da admitância é mínimo (módulo da corrente é mínimo)

3. RLC paralelo - Ressonância

$$\mathrm{R} = 1500\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 600\ \mu\mathrm{H}, \quad \mathrm{C} = 100\ \mathrm{nF}$$

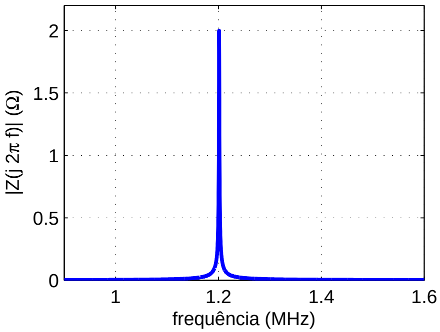


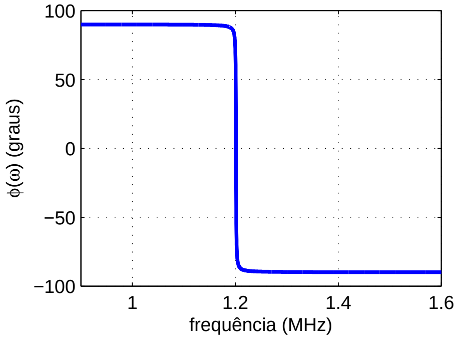
Freq. de ressonância: $\mathrm{f_r} = \mathrm{f_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} \approx 20{,}55\ \mathrm{kHz}$

3. RLC paralelo - Ressonância

Valores típicos para sintonizar uma rádio AM

$$\mathrm{R} = 2\ \Omega, \quad \mathrm{L} = 195\ \mathrm{pH}, \quad \mathrm{C} = 90\ \mu\mathrm{F}$$





Freq. de ressonância:

$\mathrm{f_r} = \mathrm{f_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} = 1{,}2\ \mathrm{MHz} = 1200\mathrm{kHz}$ (Rádio CULTURA BRASIL AM)

3.Frequência de corte

- Para o Circuito RLC paralelo

$$|Z(j\omega)|_{\max} = |Z(j\omega_0)| = R$$

Quais as frequências ω_{c_1} e ω_{c_2} nas quais $|Z(j\omega)| = R/\sqrt{2}$?

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{R}}} \Rightarrow$$

$$\omega_{c_1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

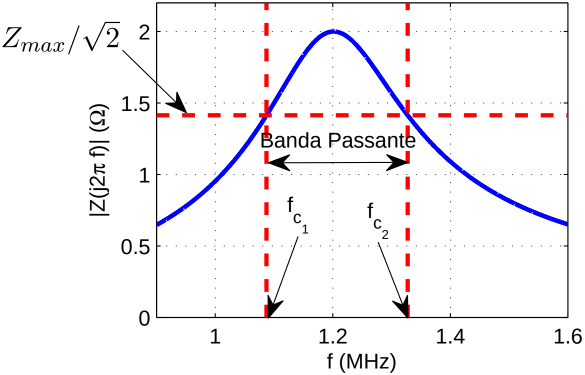
$$\omega_{c_2} = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- É comum definir a banda passante que neste caso vale

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

3. Frequência de corte

$$R = 2\ \Omega, \quad L = 195\ \text{pH}, \quad C = 1{,}22\ \text{nF}$$



- $Z_{\max}/\sqrt{2} = 1{,}4142\ \Omega$
- $\omega_{c_1} = 6{,}8313\ \text{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_1} = 1{,}0872\ \text{MHz}$
- $\omega_{c_2} = 8{,}3410\ \text{Mrad/s} \Rightarrow f_{c_2} = 1{,}3275\ \text{MHz}$
- $B = 1.5097\ \text{Mrad/s} \quad (0{,}2403\ \text{MHz})$

3. Índice de mérito

Vamos voltar ao circuito RLC paralelo.

- Esse circuito funciona como um passa-faixa com banda passante

$$\boxed{B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{1}{RC}}$$

- O índice de mérito ou fator de qualidade é definido como

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B}}$$

- Para o RLC paralelo, temos

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0}$$

- Substituindo $C = 1/(\omega_0^2 L)$, chega-se a

$$\boxed{Q_0 = RC\omega_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

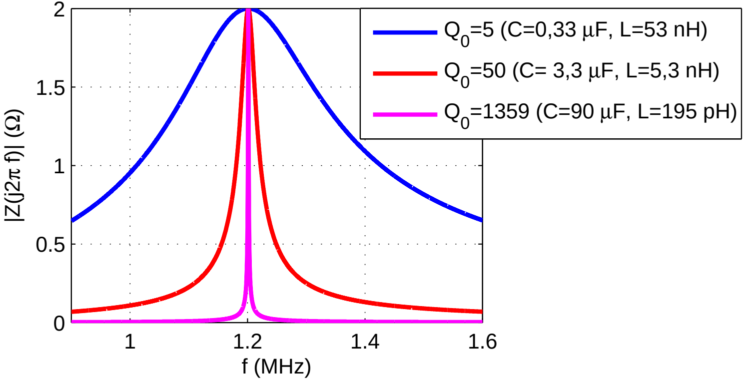
3. Índice de mérito

A admitância do circuito RLC paralelo pode ser escrita em função de Q_0:

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) =& G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\
=& G\left[1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{R}{\omega L}\right)\right] \\
=& G\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\omega_0 C}{G} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{R}{\omega_0 L}\right)\right] \\
=& G\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]
\end{aligned}
$$

3. Índice de mérito

Impedância do RLC paralelo em função de Q_0, $R = 2\ \Omega$ (fixo)



Q_0 alto, B estreita, alta seletividade, altamente oscilatório (tempo)